从惊讶到思考

——数学悖论奇景

《科学美国人》杂志社 马丁·加德纳

从惊讶到思考

——数学悖论奇景



从惊讶到思考

——数学悖论奇景

《科学美国人》编辑部编著

李思一　白葆林　译

顾基义　校

科学技术文献出版社

1986

译者说明

本书译自《科学美国人》杂志社发行的一套数学悖论幻灯片“Paradox Box”（悖论箱）的说明。“Paradox Box”是第一次采用幻灯形式来集中演示一些生动有趣而又异乎寻常的悖论，还配有一套录音带作解说，以此来激发人们对数学的兴趣。遗憾的是，我们无力把包括幻灯片、录音带在内的全套材料介绍给国内读者，只能将幻灯片的全部画面复印出来，附以解说，以连环画的形式给出各种悖论小故事，这样虽不如原有材料生动活泼，倒也不失其新颖有趣之处。

为了通俗起见，Paradox 一概译为悖论。全书共分六章，每章有十多个小故事，提出不同的悖论。为了帮助读者理解和进一步深入学习，一组画面之后备有评注，详细说明这组画的内容，另外还提供一些背景材料和有益建议。参考书目统一附于书后。

由于我们的水平不高，因此在本书的翻译工作中一定存在不少问题。承蒙研究生院的颜基义同志悉心校订，科学出版社的白树枫同志帮助编审，才使本书得以顺利完成。在此谨对他们表示衷心的感谢。

前言

“Paradox Box”是一套有六组片子的幻灯片，它包括逻辑学、概率论、数论、几何学、统计学和时间等六个方面的数学悖论，另外还附有录音带作解说。本书是这套材料的说明。

“悖论”也可叫“逆论”，或“反论”，这个词的意义比较丰富，它包括一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论，那些结论会使我们惊异无比。悖论有三种主要形式。

1·一种论断看起来好像肯定错了，但实际上却是对的（佯谬）。

2·一种论断看起来好像肯定是对的，但实际上却错了（似是而非的理论）。

3·一系列推理看起来好像无懈可击，可是却导致逻辑上自相矛盾。

悖论有点像魔术中的变戏法，它使人们在看完之后，几乎没有—个不惊讶得马上就想知道：“这套戏法是怎么搞成的？”当把技巧告诉他时，他就会不知不觉地被引进深奥而有趣的数学世界之中。正因为如此，悖论就成了一种十分有价值的教学手段。

悖论是属于领域广阔、定义严格的数学分支的一个组成部分，这一分支以“趣味数学”知名于世。这就是说它带有强烈的游戏色彩。然而，切莫以为大数学家都看不起“趣味数学”问题。欧拉就是通过对 bridge-crossing 之谜的分析打下了拓扑学的基础。莱布尼茨也写到过他在独自玩插棍游戏（一种在小方格中插小木条的游戏）时分析问题的乐趣。希尔伯特证明了切割几何图形中的许多重要定理。冯·纽曼奠基了博弈论。最受大众欢迎的计算机游戏—生命是英国著名数学家康威发明的。爱因斯坦也收藏了整整一书架关于数学游戏和数学谜的书。

趣味数学具有重大教育学价值，这一点只是在最近才为一大批教师所认识。很多现象说明，这一趋势正在发展。雅可比的教本：《数学—人类的魄力》获得了极大成功，其部分原因无疑是他巧妙地把趣味性材料揉进了传统的数学问题中。现在在教师会议和期刊里，趣味数学的文章也越来越多。美国教师委员会出版的威廉·沙夫编的《趣味数学书目》发行量是很大的。

就我们所知，悖论箱是第—次用视听方法向中学生和大学低年级学生介绍趣味数学的重要尝试。这六个部分的幻灯故事内容都很新颖，大部分是过去没有见过的。有些材料即便不是新的，它也是用不同形式和色调来表现的。

这套书有五个主要目的：

1·激发学生对数学的兴趣；

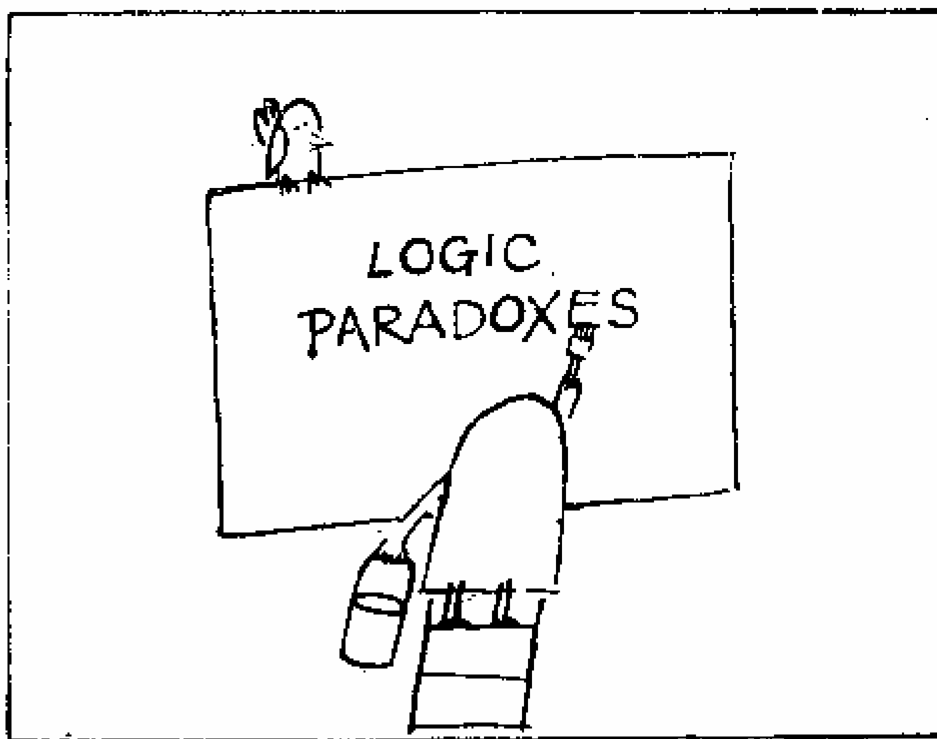
2·向读者介绍重要的数学思路；

3·发起丰富多彩的数学活动；

4·使人洞悉解题过程；

5·提高学生对现代数学所具有的美妙、多样、甚至幽默性质的鉴赏力。

第一章 逻辑学悖论



如果你曾向学生介绍过逻辑学的基本概念，就会发现，没有什么比一个使人主意忽左忽右的悖论更能引起他们的兴趣了。他们被一步一步地引上繁花似锦的小道，遵循着一条无懈可击的推理思路往前走，结果他们忽然发现自己已陷入矛盾之中。到底是什么错了？难道就在演绎推理这一过程背后有可能隐伏着什么倒霉的缺陷吗？

这一章的主要目的，是尽可能用娱乐的方式，通过提出现代逻辑学中最重要的悖论来引起学生的兴趣。在这里，“悖论”这个词意思比其他部分要窄一点。在其他几章中，悖论是强烈违反我们直觉的问题。在这里，悖论只是直接导致彼此矛盾的结果，就像证明 2+2 又等于 4，又不等于 4 一样。逻辑悖论是“不可解”的，除非能找到一种方法来完全消除这种恶性的矛盾。

尽管从古希腊起到今天，逻辑悖论一直人们带来很大乐趣，可是最伟大的数学家都总是极严肃地对待它。在发展现代逻辑学和集合论中一些巨大进展正是努力解决经典悖论的直接结果。在这里，你会看到引自伯特兰德·罗素的话，他谈到他花了好些年的时间研究悖论而没有成功，后来他和阿尔弗雷德·怀特里德合作，写了《数学原理》，这是一本奠基了现代形式逻辑的代表性论著。

作为一个数学教师，不用人提醒就懂得，逻辑学是一切演绎推理的基础，一个不懂基础逻辑的学数学的学生是没有能力来掌握数学基础的。对这些基础的理解往往是较困难的，它使初学学生丧失对数学的兴趣。幸好，这组故事可以帮助你使学生认识到，逻辑学并不像他们想象的那样枯燥无味，而是一个对数学很重要的、生动有趣的课题、其中有很多令人兴奋的问题尚待解决。

在这组故事中有三个中心问题。

1·在我们谈论语句的真实价值时，为什么需要以一种更高级的语言(称为“元语言”)来谈论它？

2·为什么现代集合论有一些规则禁止一个集合是此集合本身的元素？

3·在什么样的特殊情况下，预言未来在逻辑上是不可能的？

最好是在学习逻辑学、集合论或演绎（推理）证明的时候来认真阅读这一部分。现代几何学教科书，如雅可比的《几何学》，和很多代数以及普通数学教科书一样是以演绎推理开头的。如果你使用的是这类教科书·那末在教课（或学习）之前最好先看看这一章。

这一章的内容为展开演绎推理方面的讨论提供了丰富的背景知识，并预计到可能会提出的问题，还为较优秀的学生提供了很多精彩的补充材料。

1·克里特人伊壁孟德



伊：所有的克里特人都是撒谎者。

M：他说的是真的吗？如果他说的是实话，那么克里特人都是撒谎者，而伊壁孟德是克里特人，

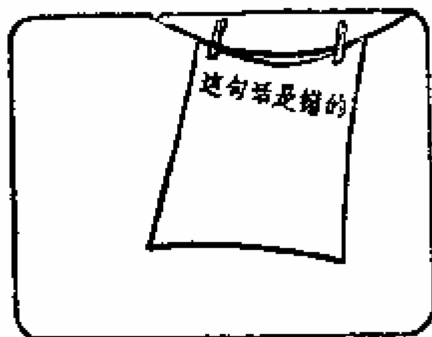
他必然说了假话。他撒谎了吗？如果他确实撒了谎，那么克里特人就都不是说谎的人，因而伊壁孟德也必然说了真话。他怎么会既撒谎，同时又说真话呢？

伊壁孟德是个半传奇式的希腊人，他在公元前 6 世纪住在希腊。有一个神话说他曾经一下子睡了 57 年。

关于他的上面那段文字，如果我们假定撒谎者总是说假话，不撒谎的人总是说真话，那么就会出现逻辑的矛盾。按此假定，“所有的克里特人都是撒谎者”这句话不可能是真话，因为这说明伊壁孟德既是撒谎的人，因此他说的就不是真话。可是这又意味着克里特人是说真话的，那么伊壁孟德说的话也必定是真话，因此上面引的那句话也不可能是假话。

古希腊人曾为此大伤脑筋，怎么会一句话看上去完美无缺，自身没有矛盾，却既是真话又是假话呢！一个斯多噶派哲学家，克利西帕斯写了六篇关于“说谎者悖论”的论文，没有一篇成功。有一位希腊诗人叫菲勒特斯，他的身体十分瘦弱，据说他的鞋中常带着铅以免他被大风吹跑，他常常担心自己会因思索这些悖论而过早地丧命。在《新约》中，圣·保罗在他给占塔斯的书信中也引述过这段悖论（1:12 – 13）。

2 · 说谎者悖论



M：我们陷入了著名的说谎者悖论之中。下面是它的最简单的形式。

甲：这句话是错的。

M：上面这个句子对吗?如果是对的，这句话就是错的！如果这句话是错的，那这个句子就对了！像这样矛盾的说法比你所能想到的还要普遍得多。

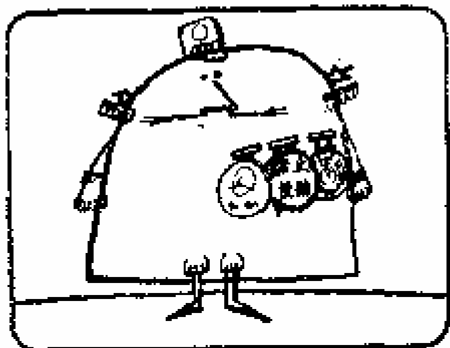
学生们是否能够解释，为什么这类悖论采用上述形式表达（即一句话谈的正是它本身）就变得清晰起来？这是因为它消除了说谎者是否总是说谎，不说谎者总是说真话。

这一悖论作这类变化是无穷的。例如，罗素曾经说，他相信哲学家乔治·摩尔平生只有一次撒谎，就是当某人问他：是否他总是说真话时，摩尔想了一会儿，就说："不是。"

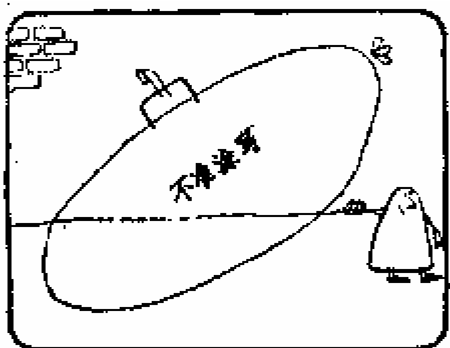
再变化一下：这本小书中所有的说明都是可靠的，只有这一节中关于说谎者悖论的评述部分的第三自然段（即现在的这一段）除外。

也许学生们还可以作出其他变化。

3·徽章和涂写



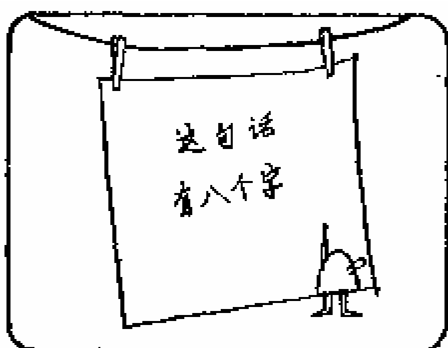
M：颁发一枚勋章，勋章上写着：
禁止授勋！



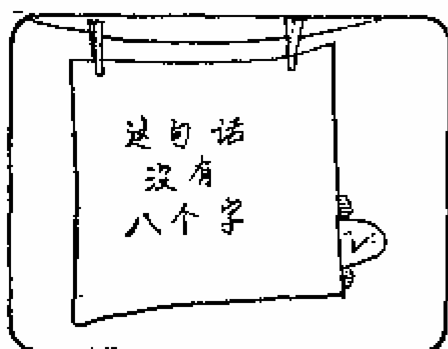
M：或者涂写一个告示：
不准涂写！

学生们知道为什么这些叙述是矛盾的吗？它们郡违背了它们自己所提出的要求。学生们一定愿意编出其他的例子，比如在缓冲器的连结杆上写“除去缓冲器连结杆”，一个招牌上写：“不许读这个招牌”，等等。—个单身汉宣称，只有漂亮得不愿嫁给他的姑娘，他才想要。一个人拒绝加入一切愿吸收他为成员的俱乐部。—个小女孩说，她很高兴她讨厌吃菜花，因为要是她喜欢的话，就会吃得太多，结果她就不能老吃到菜花了。更为接近说谎者悖论的是下面这种自相矛盾的话“一切规则都有例外”和“所有知识都值得怀疑。”

4·一句话和他的反话



M：这句话有几个字？七个字。
显然原话错了！那么它的反话就应该是对的吧，是不是？



M：不对，这句语的反话正好是八个字。所以，它像它原来的话一样是错的。我们怎么才能解决这样奇怪的尴尬局面呢？

这种悖论的创造者是谁，人们都不知道。这里还有另一个变了点花样的货真价实的悖论，学生们一定会觉得很有趣的，在黑板上写：

在黑板上标出三个有错误的句子；

1· 2+2=4

2· 3*6=17

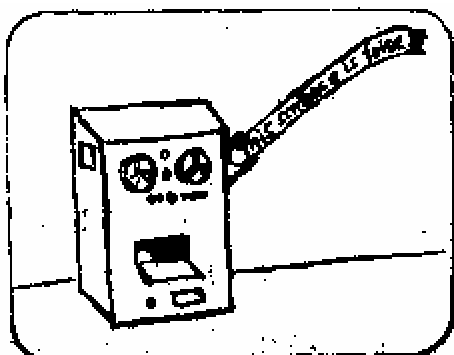
3· 8/4=2

4· 13-6=5

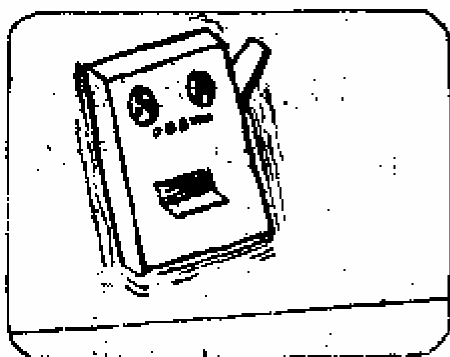
5· 5+4=9

回答：只有第 2 句和第 4 句是错的。所以说“有三个句子错了”的断言错了，而这个断言就成了第三个错句！

5 · 发狂的计算机



M：很多年以前，一台设计用于检验语句正误的计算机中馈入了说谎者逆论。语句："这句话是错的"。

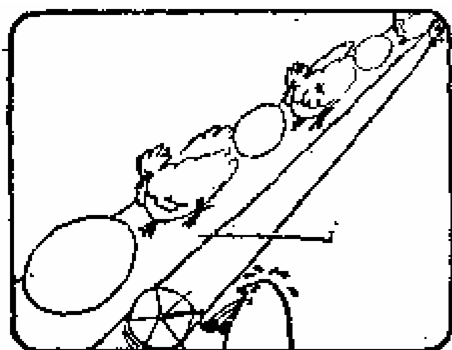


M：这台可怜的计算机发起狂来，不断地打出对、错、对、错的结果，陷入了无休止的反复中。

世界上第一台用于解决真正的逻辑问题的计算机，是在 1947 年由威廉·伯克哈特和西奥多·卡林制选出来的，那时他们还在哈佛大学学习。当他们让这台机器评价说谎者悖论时，计算机便进入反复振荡状态，陷入了来回倒腾的困境（见马丁·加德纳的《逻辑机和逻辑图》)。

戈登·狄克森的小说"猴子扭伤"，发表在 1951 年 8 月的《科学幻想小说》上，说的是某些科学家想让计算机不工作来节省机器的寿命。他们的办法是告诉计算机："你必须拒绝我现在给你编的语句，因为我编的所有语句都是错的。"（注：没想到计算机却因此而不断地重复工作直到耗尽它的寿命）

6 · 无穷的倒退



M：机器受到的难题就像人碰到要解答一个古老的谜？。

问题：鸡和鸡蛋，到底先有哪个？

M：先有鸡吗？不，它必须从鸡蛋里孵出来，那末先有鸡蛋？不，它必须由鸡生下。好！你陷入了无穷的倒退之中。

鸡和鸡蛋这个古老的问题是逻辑学家称为"无穷倒退"的最普通的例子。老人牌麦片往往装在一个盒中，上面的画是一个老人举着一盒麦片，这个盒上也有一张画有一个老人举着一盒麦片的小画片。自然，那个小盒上又有同样的画片，如此以往就像一个套一个的中国盒子的无穷连环套一样。《科学美国人》1965 年 4 月号有一个封面，画着—个人眼中反映着这本杂志。你可以看到在反映出的杂志上，也有一个小一点的眼睛，反映出一本更小的杂志，自然这样一直小下去。在理发店里，对面的墙上有很多相向的镜子，人们在这些镜子中可以看到反照出的无穷倒退。

在幻想作品中有类似的倒退。菲利浦·夸尔斯是阿尔道斯·赫克斯勒的小说《点计数器点》中的人物：他是一个作家，正在写一本小说，是关于一个作家正在写一个作家在写小说的小说……。在安德烈·贾德的小说《伪造品》中，在卡明的剧作《他》中，在诺曼·迈勒的《笔记》这类短篇小说中，都有类似的倒退。

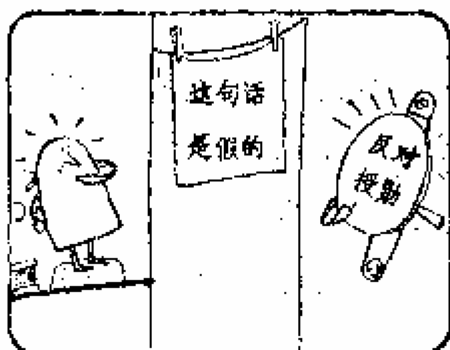
乔纳·斯威夫特在一首诗中写了一段关于跳蚤的无穷倒退，数学家奥古斯塔斯·德摩根把它改写为：

大跳蚤有小跳蚤
　　在它们的背上咬，
小跳蚤又有小跳蚤，
如此下去
　　没完没了。

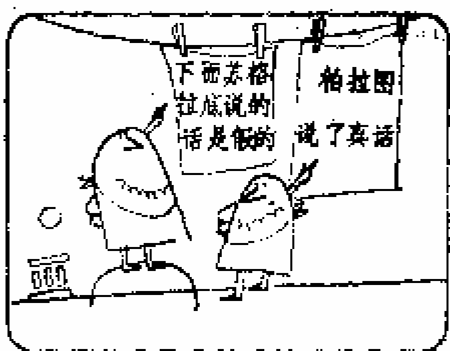
大跳蚤倒了个儿——变小
　　上面还有大跳蚤，
一个上面有一个，
总也找不到
　　谁的辈数老。

在艺术、文学、数学和逻辑方面无穷倒退的更多实例可参见《科学美国人》编的马丁·加德勒的第六本数学游戏。

7·柏拉图—苏格拉底悖论



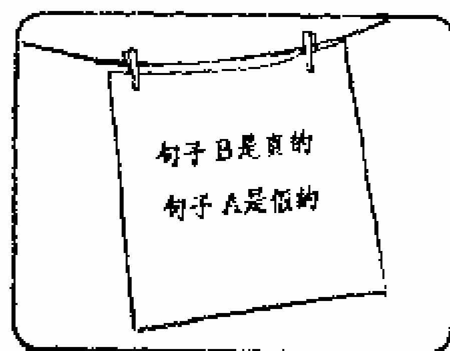
M：让我想一想。一个克里特人说的是（全部）克里特人。一句话说的是这句话本身。一个徽章表达的是关于（全部）徽章的论断。所有这些句子看来都是谈论关于句子本身的事。是不是自关联引起了麻烦？



M：不是。就连古希腊人也已知道即便避免了自关联也不足以消除矛盾。这里有一段对话可以证明这一点：

柏拉图：下面苏格拉底说的话是假的。

苏格拉底：柏拉图说了真话！



M：逻辑学家简化了柏拉图—苏格拉底悖论。不管你让哪一句话是真的，另一句总与之矛盾。两句话谈的都不是它本身，但放到一起，仍会出现说谎者悖论。

说谎者悖论的这一翻版古时候的逻辑学家已讨论得很多了，它之所以重要就在于它证明；在真实性悖论中产生混乱的根源远不是自关联所能解决的。

假若句子 A 是真的，那么句子 B 必然是真的。但是，如果句子 B 是真的，那句子 A 就必须是假的。好吧，让我们认为句子 A 是假的，那就意味着句子 B 是假的。这样，要是句子 B 是假的，句子 A 就须是真的，结果我们又从头开始。这个过程就会这样一面重复下去，就像建筑物中一对拱顶石的顶上彼此嵌进一样。两个句子都没有谈到它自身，但放到一起，它们就不断地改变着它们的真实性，结果我们就无法说出任何一个句子是真还是假。

学生们一定愿意变个花样，把这个悖论写在一张卡片上出示给他的朋友。这是英国数学家乔戴因想出的。

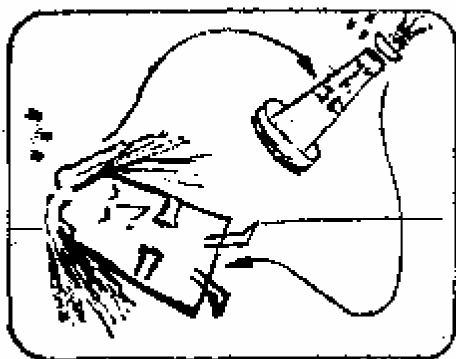
在一张白卡片的一面写：

这张卡片背面的句子是真的。

该卡片的背面写的是：

这张卡片背面的句子是假的。

8 · 爱丽斯和红色国王



M：柏拉图—苏格拉底悖论有两个无穷倒退。这正像在《透过镜子》中的爱丽斯和红色国王一样。

爱丽斯：我在做梦，梦见了红色国王。可是他睡着了，梦见我正做着关于他的梦，在这儿他也在梦见我。啊，我的天！这样梦下去哪有个完。

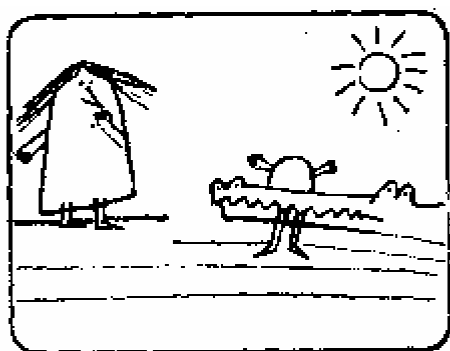
在《透过镜子》的第 4 章，有一段是爱丽斯碰到了红色国王。国王睡着了，特威德勒弟告诉爱丽斯，国王正梦见她，她只是国王睡梦中的人，实际是不存在的。

“要是国王醒来了”，特威德勒弟补充道：“你就完了——啪——就像蜡烛一样熄灭了！”

我们应该记住，所有这些都是爱丽斯自己梦中的事。到底是国王是她梦中的事物，还是她是国王梦中的事物？哪一个是真实的，哪一个是梦？鸡蛋和鸡随时间回溯，就出现没完没了的鸡蛋和鸡，而这里的倒退却是团团转的。这有点像莫里斯·埃谢尔的一幅名画，其中有两只手，甲手正在拉乙手，乙手正在拉甲手。

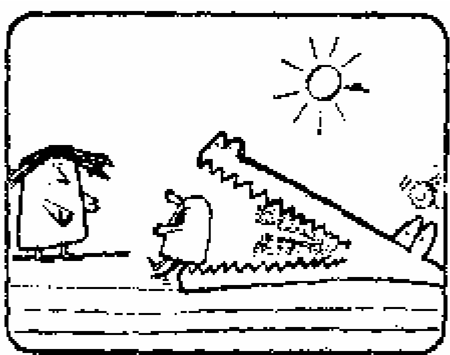
双重梦引出了哲学上关于真实性的深刻问题。“假如它不是以幽默的笔调写的”，柏特兰德罗素曾说：“我们就全发现它太痛苦了。”请看下面——

9·鳄鱼和小孩



M；希腊哲学家喜欢讲一个鳄鱼的故事。一条鳄鱼从母亲手中抢走了一个小孩。

鳄鱼：我会不会吃掉你的孩子？答对了，我就把孩子不加伤害地还给你。



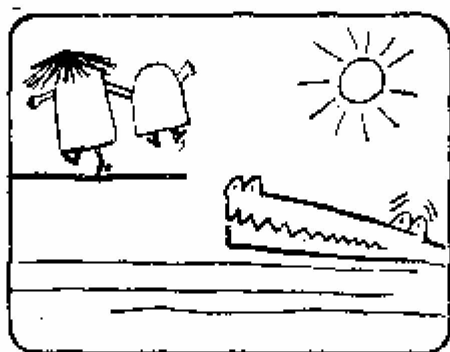
母亲：呵、呵！你是要吃掉我的孩子的。

鳄鱼：嗨……。我怎么办呢？如果我把孩子交还你，你就说错了。我应该吃掉他。

M：鳄鱼碰到了难题。它把孩子既要吃掉，同时又得交还给孩子的母亲。

鳄鱼：好了，这样我就不把他交给你了。

母亲：可是你必须交给我。如果你吃了我的孩子，我就说对了，你就得把他交回给我。



M：拙劣的鳄鱼懵了，结果把孩子交回了母亲，母亲一把拽住孩子，跑掉了。

鳄鱼；他妈的！要是她说我要给回她孩子，我就可美餐一顿了。

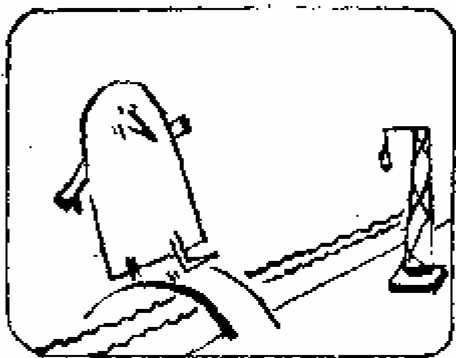
如果你们细细琢磨这段著名的悖论，你们一定会明白那位母亲是多么机智。她对鱷鱼说的是"你将会吃掉我的孩子"。

无论鱷鱼怎么做，都必定与它的允诺相矛盾。如果它交回小孩，母亲就说错了，它就可以吃掉小孩。可如果它吃掉小孩，母亲就说对了，这就得让它把孩子无伤害地交出来。鱷鱼陷入了逻辑悖论之中，它无法从中摆脱出来而不违背它自己。

如果不是这样，假定母亲说："你将要把孩子交回给我。"

那么，鳐鱼就随便了，它既可以交回孩子，也可以吃掉他。如果它交回小孩，母亲就说对了，鳐鱼遵循了自己的诺言。反过来，如果它聪明一些的话，它可以吃掉孩子，这使得母亲的话错了，鳐鱼便可以从交回小孩的义务中解脱出来。

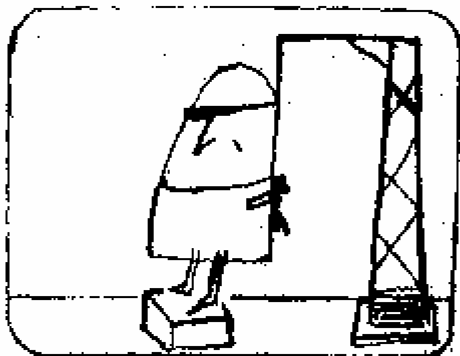
10 · 唐·吉诃德悖论



M：小说《唐·吉诃德》里描写过一个国家 · 它有一条奇怪的法律：每一个旅游者都要回答一个问题。

问，你来这里做什么？

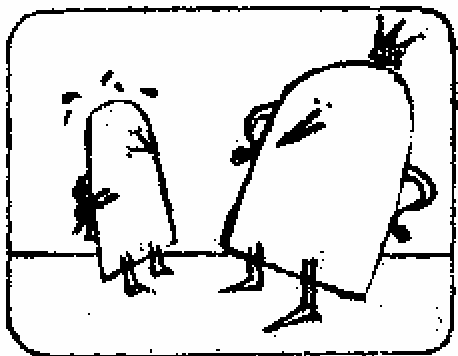
M：如果旅游者回答对了。一切都好办。如果回答错了，他就要被绞死。



M：一天，有个旅游者回答——

旅游者：我来这里是要被绞死。

M：这时，卫兵也和鳄鱼一样慌了神，如果他们不把这人绞死，他就说错了，就得受绞刑。可是，如果他们绞死他，他就说对了，就不应该绞死他。



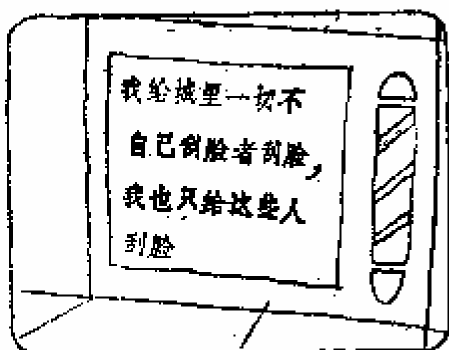
M：为了做出决断，旅游者被送到国王那里。苦苦想了好久，国王才说——

国王：不管我做出什么决定，都肯定要破坏这条法律。我们还是宽大为怀算了，让这个人自由吧。

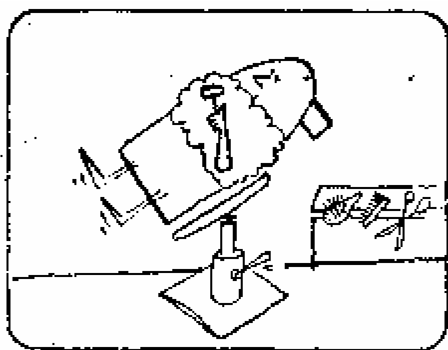
这段绞人的悖论出在《唐·吉诃德》第二卷的第 51 章。吉诃德的仆人桑乔·潘萨成了一个小岛的统治者，在那里他起誓在这个国家要奉行这条奇怪的关于旅游者的法律。当那个旅游者被带到他面前时，他用慈悲和常识做出了对这个人的裁决。

这条悖论实质上和鳄鱼悖论是同样的。旅游者的回答使小岛的君王无法执行这条法律而不自相矛盾。

11 · 理发师悖论



M：著名的理发师悖论是伯特纳德·罗素提出的。一个理发师的招牌上写着：告示：城里所有不自己刮脸的男人都由我给他们刮脸，我也只给这些人刮脸。



M：谁给这位理发师刮脸呢？
M：如果他自己刮脸，那他就属于自己刮脸的那类人。但是，他的招牌说明他不给这类人刮脸，因此他不能自己来刮。



M：如果另外一个人来给他刮脸，那他就是不自己刮脸的人。但是，他的招牌说他要给所有这类人刮脸。因此其他任何人也不能给他刮脸。看来，没有任何人能给这位理发师刮脸了！

伯特纳德·罗素提出这个悖论，为的是把他发现的关于集合的一个著名悖论用故事通俗地表述出来。某些集合看起来是它自己的元素。例如，所有不是苹果的东西的集合、它本身就不是苹果，所以它必然是此集合自身的元素。现在来考虑一个由一切不是它本身的元案的集合组成的集合。这个集合是它本身的元素吗？无论你作何回答，你都自相矛盾[*]。

在逻辑学历史上最富戏剧性的危机之一就与这条逆论有关。德国的著名逻辑学家哥特洛伯·弗里兹写完了他最重要的著作《算法基础》第二卷，他认为他在这本书中确立了一套严密的集合论，它可作为整个数学的基础。1902 年，当该书付印时，他收到了罗索的信，他得知上面那条悖论。弗里兹的集合论容许由一切不是它自身的元素的集合构成的集合。正如罗素在信中澄清的，这个表面上结构完美的集合却是自相矛盾的。弗里兹在收到罗素的信后，只来得及插入一个简短的附言：

“一个科学家所遇到的最不合心意的事，莫过于是在他的工作即将结束时使其基础崩溃了，我把罗素的来信发表如下……”

据说，弗里兹使用的词“不合心意”（undesirable）是数学史上最词不达意的说法了。

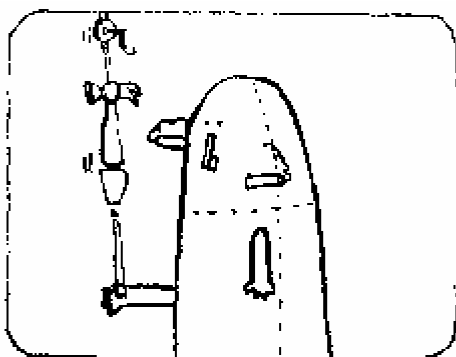
---

[*] 设对于一类集合，$A_1=\{a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1i} \ldots\}$，$A_2=\{a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2i} \ldots\}$，……，$A_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{ij} \ldots\}$都满足条件$a_{ij} \in A_i$ $(i=1, 2, \ldots j=1, 2, \ldots)$但$A_i \notin A_i$一切这类集合物成新集合$A=\{A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots)$ $A_i \in A$，问$A \in A$？如果认为$A \in A$，则A应该不是自身集合的元素，即$A \notin A$，如果$A \notin A$，A就应是本集合的元素，即$A \in A$，岂非矛盾——译注

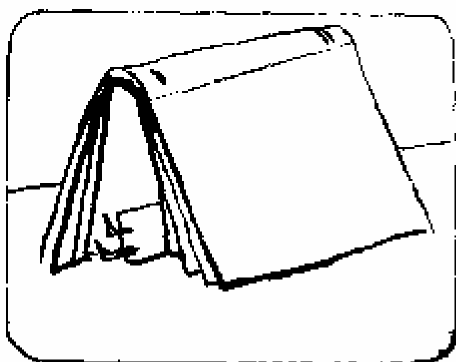
12 · 占星家、机器人和目录



M：想想这个占星家，他给一切不占卜自己的占星家以忠告，他也只给这些占星家以忠告。谁给这位占星家忠告？



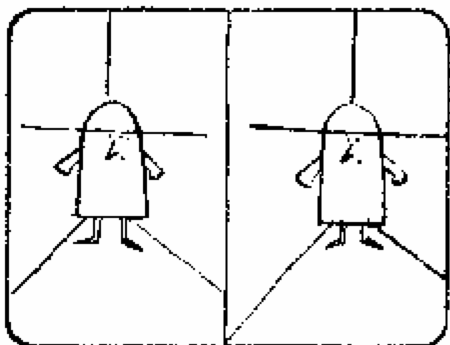
M：或者想想这个机器人，它修理一切不修理自身的机器人。谁修理这个机器人？



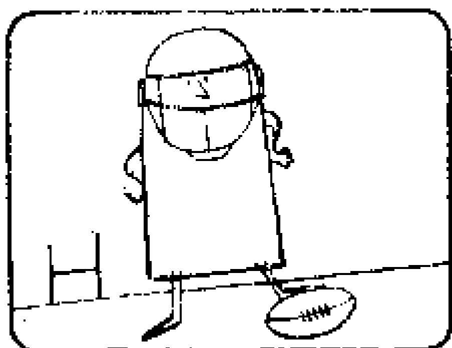
M：再想想这个目录，它将一切不列入本身的目录编目，这个目录编入哪个目录？这些都是罗素悖论的实例。

在罗素的理发师悖论的所有这些翻版中 都是在集合 S 中确定了一个关系 R，它是从其中一个元素到集合 S 中不以 R 自关联的所有元素的关系。选取不同性质的集合和不同的关系，就可轻易地把这种悖论变幻出新的花样来。

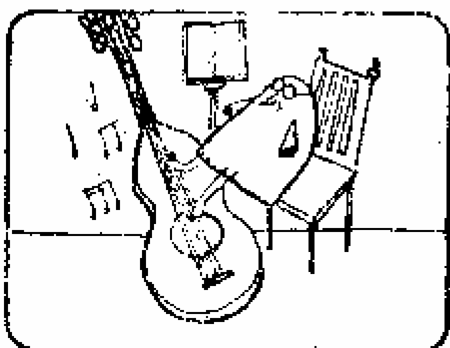
13 · 无聊与有趣



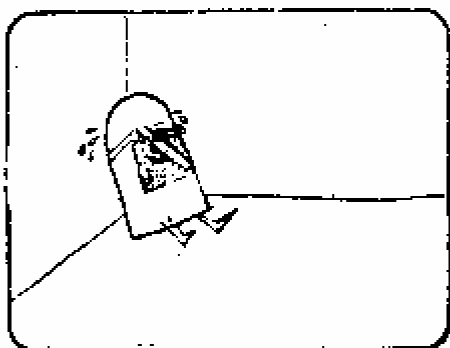
M：有些人很有意思，有些人很无聊。



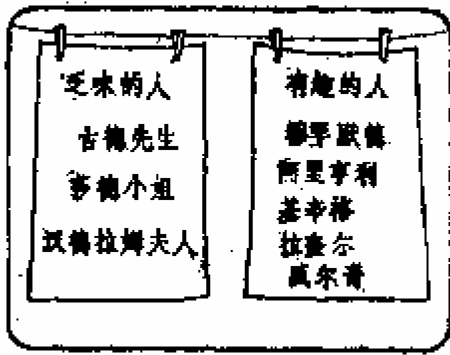
甲：我是全美足球明星。



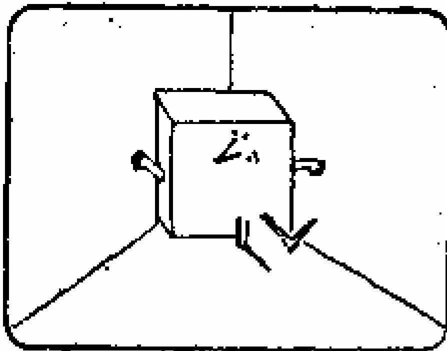
乙：我可以用脚趾弹吉他。



丙：我什么也不会做。



M：这里有一张列举了所有无聊人的表，一张列举了所有有趣人的表，在无聊人的表上自然总有一个地方写着世界上最无聊的人。



M：可是这一点使得他非常有意思。这样，我们就得把他移到另一个表中。

丙：多谢。

M：现在又有另一个人成了最无聊的人，他也变得使人感兴趣起来。结果最后每个人都变得有意思起来，是不是？

不要过分严格推敲，这个逗人的悖论就第一次给出了“没有一个数是没有意思的”这一命题的证明。构思者埃德温·比彻姆巴赫在 1945 年的《美国数学月刊》4 月号上以醒目的标题“有趣的整数”将它发表出来。

试试看，你们对于下列问题有何反应？

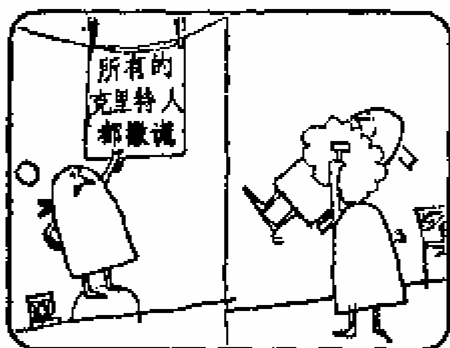
1·这个证明可以成立，还是有谬误？

2·把第二无聊的人移到有趣人的表中是否会引起第一个移到有趣人表中的人又变得乏味起来，还是仍然保持是有趣的呢？

3·是否存在一种观念，按此观念每个人都是有意思的，因为他可以是某个特殊集合中最乏味的人，正如每个整数在特定的集合中都可以是最小的数一样？

4·如果所有的人（或整数）都是有意思的，那么这是否使得“有意思”这一形容词变得无意义了呢？

14·语义学和集合论



M：关于真实性的悖论称为语义学悖论，关于事物的集合的悖论则是集合论悖论。两种类型是密切相关的。

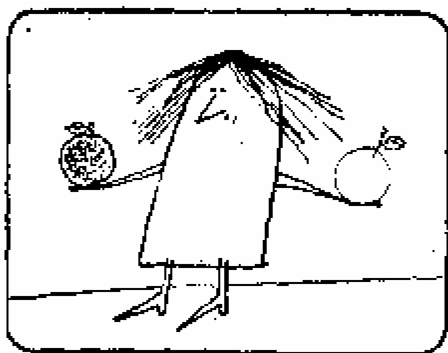
语义学（真实性）悖论和集合论（或经典）悖论之间的对应关系可由下面事实体现出来，即每一段关于真实性的命题，都可重新组织为关于集合的命题，反过来也一样。例如，“所有苹果都是红的”，这句话等价于下述命题，“如果 x 是苹果这句话是真话，则 x 是红的这句法也是真的。”

让我们看看，到底说谎者悖论——语义学的命题，如何改述为实质上是与理发师悖论同样的集合论的命题。

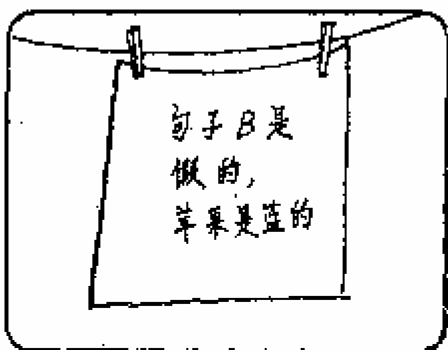
假定黑板上写着一句话：“这句话是假的。”从效果上讲，这句话是说“这句话宣称像这个黑板上宣称自己是假话的句子，也只是这类句子的集合才是真的。”

用类似方法，可以把每一个语义学悖论转变为集合论悖论，把每一个集合论悖论转变为语义学悖论。

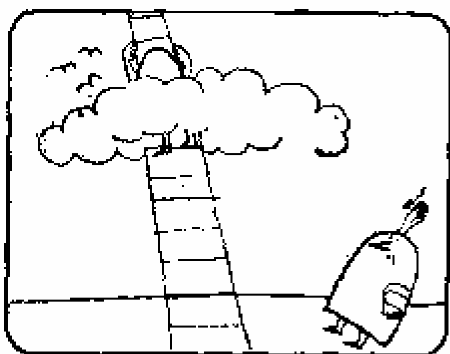
15 · 抽象语言



M：语义学悖论要靠引进抽象语言来解决。关于世界的种种论述，如“苹果是红的”或“苹果是蓝的”等，都是用实际语言来组成的。而关于真实性的论述则必须用抽象语言来组成。



M：在这个例子中，不存在悖论，因为句子 A 是用抽象语言写出的，谈论的是句子 B 的真实性，而句子却是用实际语言写出的。



M：我们怎样才能谈论一种抽象语言的真实性呢？我们必须达到更高级的抽象语言。在这个无穷的阶梯中，每一级对下一级都是抽象语言，对上一级又是实际语言。

抽象语言的概念是由波兰数学家阿尔弗雷德·塔斯基提出的。在阶梯的底层是实际语言或形象语言，如“火星有两个卫星”。像真和假这种词不在这种语言中出现。为了谈论用这种语言表述的句子真和假，我们必须使用抽象语言，即比所说明的语言更高一级的语言。抽象语言包括了所有的形象语言，但它比形象语言“更丰富”，因为它可以谈论形象语言的真实性。我们引用一个塔斯基喜爱的例子：“雪是白的，”这是用形象语言说明的。而“‘雪是白的’这句话是真的”就是用抽象语言说的。

我们能否谈论一句抽象语言的真假性呢？能，不过仅当进到更高一级的抽象语言，并用更高级和更丰富的，包括了所有它以下的形象语言的语言说话时才能

做到。

这个阶梯的每一级对它紧上面那一级而言都是形象语言。而每—级，除开最底下那级外，对它紧下面那级而言，又是抽象语言。这个阶梯，我们愿意向上延伸多少就可以有多少。

这个阶梯的头四级是：

A · 任意一个三角形的内角和是 180°

B · 句子 A 是真的。

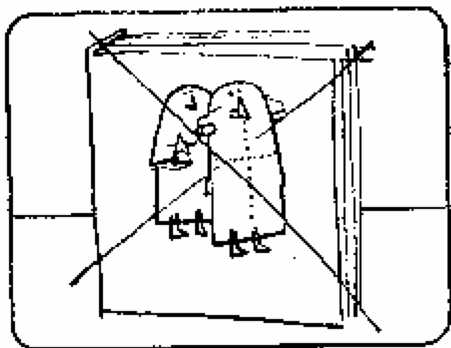
C · 句子 B 是真的。

D · 句子 C 是真的。

注意，语句 A 简单叙述了几何客体的定理。关于定理的证明在几何教科书中则是用抽象语言 B 写的。关于证明理论的书又是用语言 C 写的。幸好，数学家很少需用比 C 更高级的语言。

刘易斯·卡洛尔在一篇文章中饶有趣味地讨论了这个阶梯在理论上的无限性。题为“乌龟对阿基里斯说了些什么”，后来重印时题为“刘易斯·卡洛尔的魔术。”

16 · 类型的理论



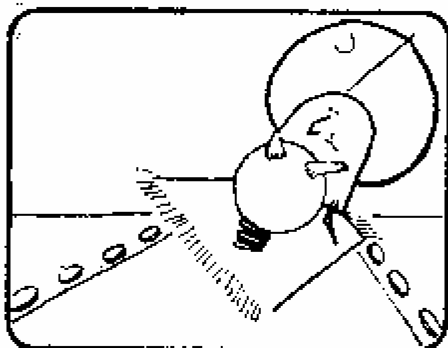
M：集合悖论可用一个类似的无限等级排解掉。一个集合不能是该集合本身的元素，或不能是低一级的任何集合的元素。上面举出的那个理发师，占星家、机器人和目录简直就不存在了。

在集合论中，与塔斯基的抽象语言阶梯等价的，伯特纳德·罗素最初把它称为“类型理论”。且不管技术上的术语，这个理论把集合按类型的级别加以排列，此时说一个集合是它本身的一个元素，或说它不是此集合本身的元素就变得毫无意义了。从而消除了自相矛盾的集合。这种矛盾的集合根本就不“存在”。如果遵循类型理论的法则，就不存在有意义的方法来定义这种集合。这就相当于一个语义学的规定，像说谎者悖论这样的句子简直就不是句子，因为它违反了合格句子的组成法则。

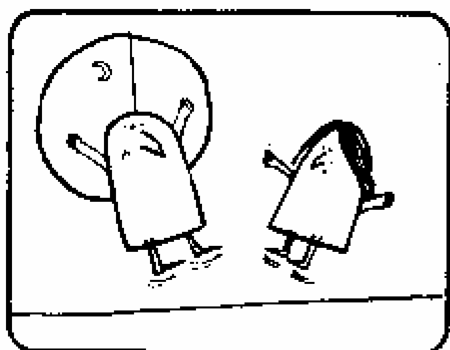
伯特纳德·罗素花费了很多年时间研究他的类型理论（现在称为“简单类型论”，因为后来逻辑学家大大简化了它）。在《哲学的演进》一书中，罗素写道：

“在写完《数学原理》时，我断然决定尝试要找到解决上述悖论的办法。我感到这就差不多像是对我个人的挑战，并且如有必要，我将以我的余生来努力实现它。可是由于两个原因我发觉这是难以对付的事。第一，整个问题时时以其琐细烦恼着我……第二，像我这样尝试，可能会毫无进展。整个 1903 年和 1904 年，我的精力几乎全部投入这个问题中，可是没有丝毫成功的迹象。”

17·梵学者（印度预言家）的预言



M：梵学者能用他的水晶球看到未来吗？试图预言未来就会导致一种新的奇异的逻辑悖论。

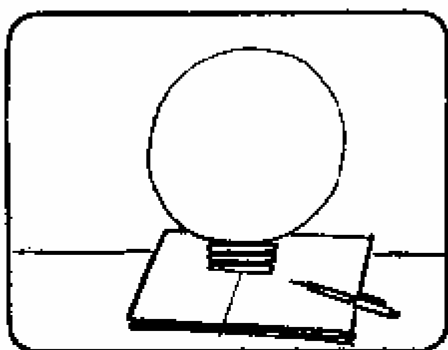


M：一天梵学者与他的十多岁的女儿苏椰发生了争论。

苏椰：你是一个大骗子，爸爸。你根本不能预言未来。

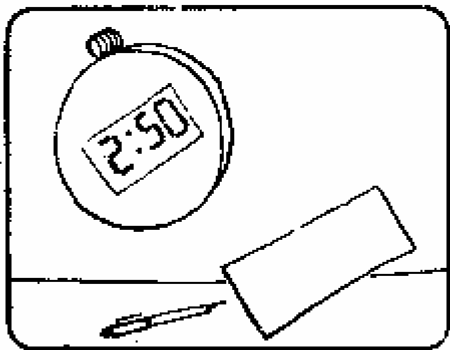
学者；我肯定能。

苏椰：不，你不能。我就可以证明它！

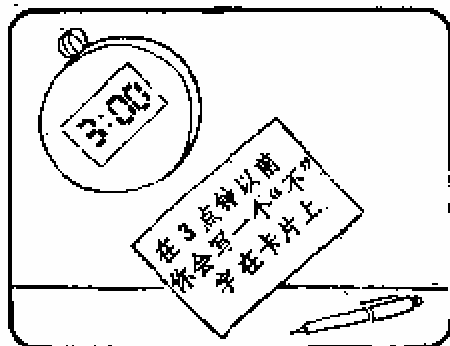


M：苏椰在一张纸上写了一些字，把它折起来，再将它压在水晶球下。

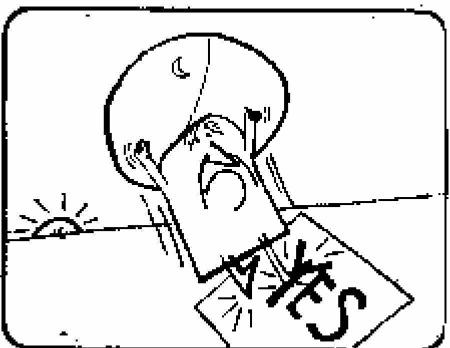
苏椰：我写了一件事，它在 3 点钟以前可能发生，也可能不发生。如果你能预言它是发生，还是不发生，在我毕业时你就不用给我买你答应过要给我买的汽车了。



苏椰：这是一张白卡片。如果你认为这件事会发生，就在上面写“是”；如果你认为它不发生，你就写“不”。要是你写错了，你答应现在就买辆汽车给我，不要拖到以后好吗？
学者：好吧，苏椰，这可是一项定约啊。



M：梵学者在卡片写了一个字。到 3 点钟时，苏椰把水晶球下面的纸拿出来，高声读道：
苏椰：在下午 3 点之前你将写一个“不”字在卡片上。



学者：你捉弄了我。我写的是“是”，所以我错了。可是，我要是写“不”在卡片上，我也错了。我根本不可能写对的。
苏椰：我想要一辆红色的赛车，爸爸，要带斗形座的。

这条悖论最早的形式是关于一台计算机，这台计算机用开红灯表示“是”，开绿灯表示“不”。这台计算机被要求用回答“是”或“不”来预言下一次灯亮是不是它的绿灯。很明显，要它预言正确，在逻辑上是不可能的。这里改写为与梵学者打赌，是马丁·加德勒创造的，发表在他的《选自‘科学美国人’的新的数学游戏》中第 11 章。

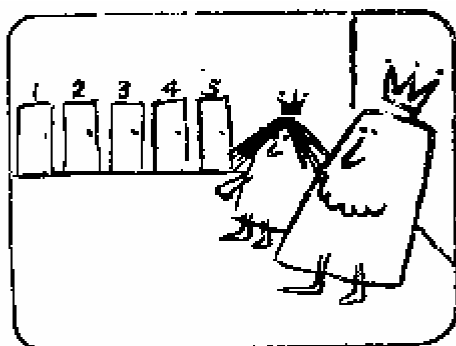
这个悖论可以简化成最简单的形式，即问一个人：“你下句话要讲的是‘不’，对不对？?请回答‘是’或‘不’。”

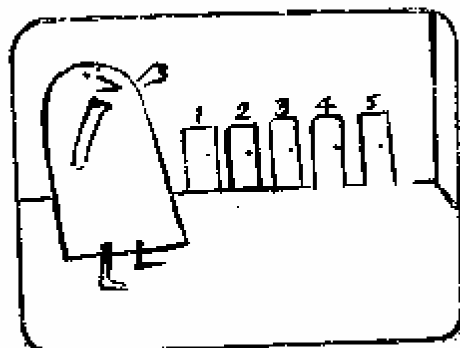
这条悖论是否和说谎者悖论相同？这个问题将引起一场有趣的班级讨论。当这个人回答时，“不”的意思是什么？显然，在说谎者悖论中它相当于“我现在说的‘这是错的’这句话是错的。”这自然和“这句话是错的”一样。因此，梵学者悖论只不过是说谎者悖论经过伪装的翻版而已。

注意，恰如“这句话是对的”不会导致悖论一样，问题你下句话要说“是”，对不对？”也不会导致悖论。学者回答“是”或“不”都不会引起矛盾。这也就像我们对说谎者悖论的翻版——鳄鱼故事的情况，上述结果相当于，妈妈要是说：“你

要把孩子还给我。”鳄鱼既可以吃掉小孩，也可以交回小孩，均不会引起矛盾。

18 · 意想不到的老虎





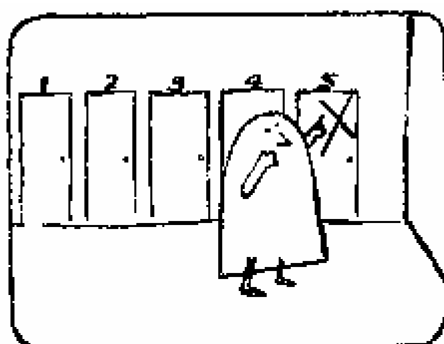
公主：父亲，你是国王。我可以和迈克结婚吗？

国王：我亲爱的，如果迈克打死这五个门后藏着的一只老虎，你就可以和他结婚。迈克必须顺次序开门，从 1 号门开始。他事先不

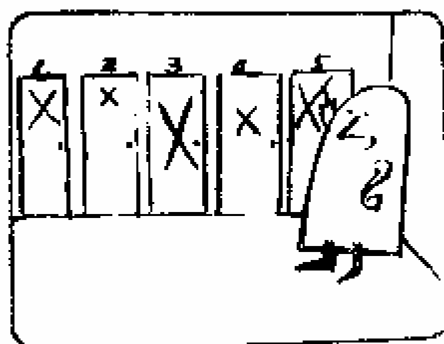
知道哪个房间里有老虎，只有开了那扇门才知道。这只老底将是料想不到的。

M；迈克看着这些门，对自己说道——

迈克：如果我打开了四个空房间的门，我就会知道老虎在第五个房间。可是，国王说我不能事先知道它在哪里。所以老虎不可能在第五个房间里。

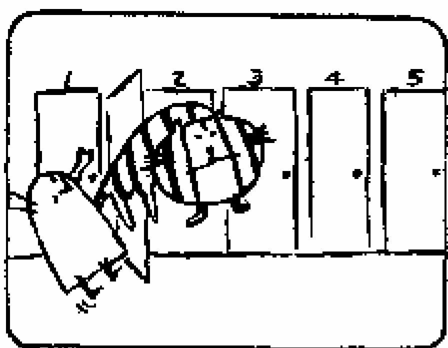


迈克：五被排除了，所以老虎必然在其余四个房间之一。那么在我开了三个空房间之后，又怎么样了？老虎必然在第四个房间。可是，这样它就不是预料不到的了。所以四也被排除了。



M：按同样的理由，迈克证明老虎不能在第三、第二和第一个房间。迈克十分快乐。

迈克：哪个门的背后也不会有老虎。如果有，它就不是料想不到的。这不符合国王的允诺。国王总是遵守诺言的。



M：迈克证明了不会有老虎之后，就冒冒失失地去开门了。使他惊骇的是，老虎从第二个房间中跳了出来。这是完全出乎意料的。这一切表明国王遵守了他的诺言。迄今为止，逻辑学家对于迈克究竟错在哪里还未得到统一意见。

意想不到的老虎这则悖论有很多其他形式的故事。不知什么原因，它第一次是发表在四十年代初，说的是一个教授的故事。这位教授宣布下一周的其一天要举行一次“意料之外的考试”。他向他的学生保证，没有一个学生能在考试那天之前推测出考试的日期。一个学生“证明”了这不会在下一周的最后一天，接着是不会在倒数第二天，倒数第三天，等等，结果是不会在下周的每一天考试。然而，教授能够遵守他的诺言来考学生，比如说在第三天考。

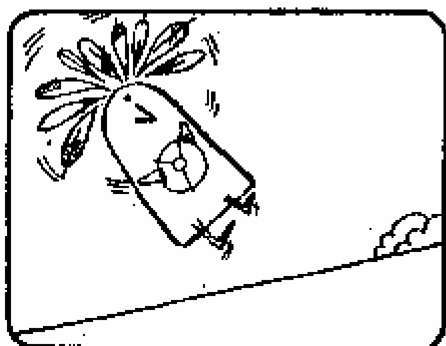
当哈佛大学哲学家 W.V.奎因在 1953 年写的一篇关于这个悖论的论文中，把它改成了一个监狱长排定一个意想不到的日期绞死犯人的故事。关于这条悖论的讨论，有一个列举了 23 本参考书的书目，可参见马丁·加德勒的《料想不到的绞刑和其他数学游戏》一书第一章。

大多数人承认迈克推理的第一步是正确的，即那只老虎不可能在最后一个房间。可是，一旦承认这是严格的推理，迈克其余的推理就跟着成立。因为，假若老虎不可能在最后一个房间，那么同样的理由将排除它在倒数第二间，第三间，一直到其余各房间。

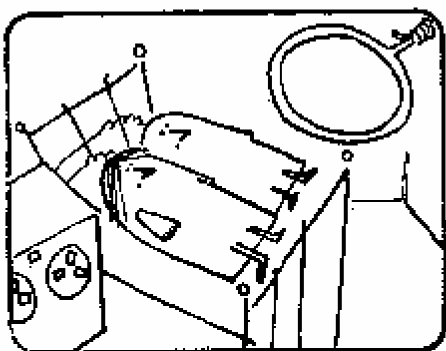
然而，很容易证明迈克推理的第一步也是错的。假定他打开了所有房门，只余下最后一个门。这时，他能准确地推断说最后一个房间里没有老虎吗？不能！因为，如果他这样推断，他也许会打开这个房门，发现有一个料想不到的老虎在其中！其实，即使问题中只有一个房间，整个悖论也仍存在。

逻辑学家的一致意见是，尽管国王知道他能够遵守他的诺言，而迈克却无法知道它。因此，他根本无法以充分的证据推论在任何一个房间没有老虎，包括最后一个房间在内。

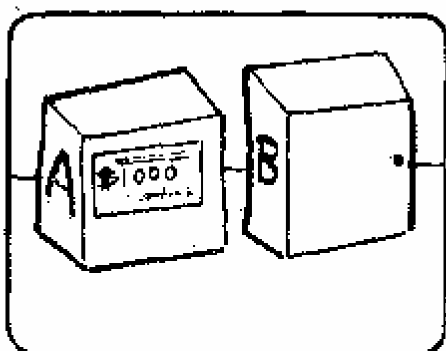
19 · 纽科姆悖论



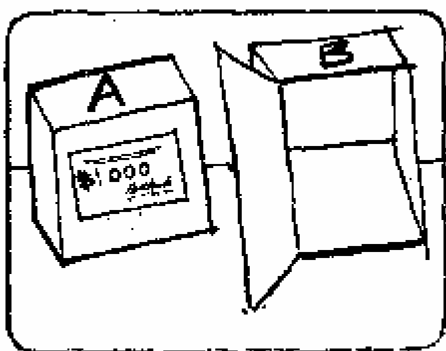
M：一天，一个由外层空间来的超级生物欧米加在地球着陆。



M：欧米加搞出一个设备来研究人的大脑。他可以十分准确地预言每一个人在二者择一时会选择哪一个。

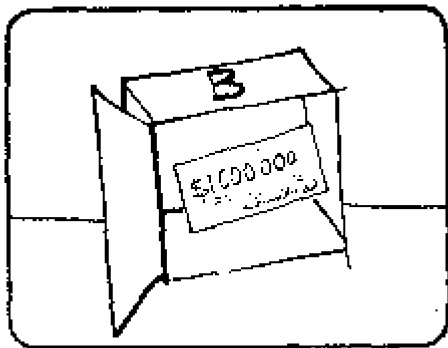


M：欧米加用两个大箱子检验了很多人。箱子 A 是透明的，总是装着 1 千美元。箱子 B 不透明，它要么装着 1 百万美元，要么空着。

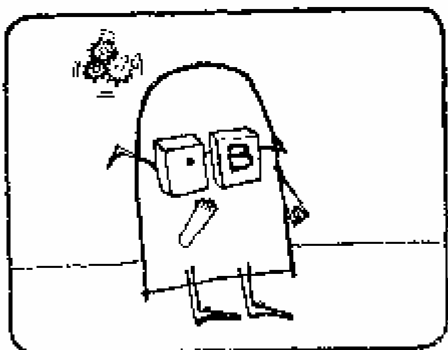


M：欧米加告诉每一个受试者。

欧米加：你有两种选择，一种是你拿走两个箱子，可以获得其中的东西。可是，当我预计你这样做时，我就让箱子 B 空着。你就只能得到 1 千美元。

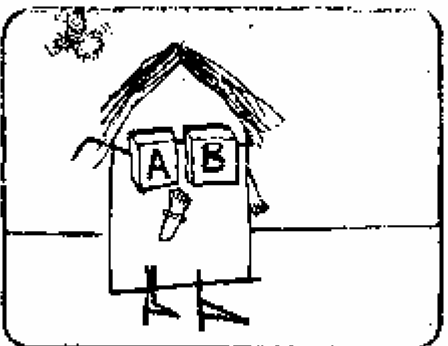


欧米加：另一种选择是只拿一个箱子B。如果我预计你这样做时，我就放进箱子B中1百万美元。你能得到全部款子。



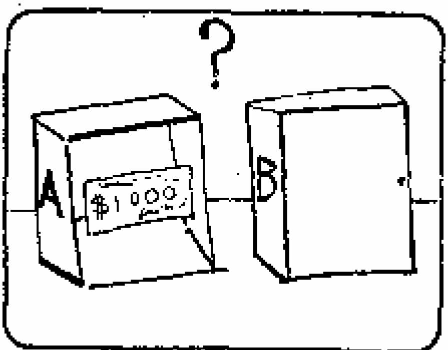
M：这个男人决定只拿箱子B。他的理由是——

男：我已看见欧米加尝试了几百次，每次他都预计对了。凡是拿两个箱子的人，只能得到1千美元。所以我只拿箱子B，就可变成一个百万富翁。



M：这个女孩决定要拿两个箱子，她的理由是——

女：欧米加已经做完了他的预言，并已离开。箱子不会再变了。如果是空的，它还是空的。如果它是有钱的，它还是有钱。所以我要拿两个箱子，就可以得到里面所有的钱。



M：你认为谁的决定最好？两种看法不可能都对。哪一种错了？它为何错了？这是一个新的悖论，而专家们还不知道如何解决它。

这个悖论是哲学家经常争论的很多预言悖论中最新的，也是最棘手的。它是物理学家威廉·纽科姆发明的，称为纽科姆悖论。哈佛大学的哲学家罗伯特·诺吉克首先发表并分析了这个悖论。他分析的依据主要是数学家称之为“博弈论”或“对策论”的法则。

男孩决定只拿B箱是很容易理解的。为了使女孩的论据明显起来，要记住欧

米加已经走了。箱子里也许有钱，也许空着，这是不会再改变的。如果有钱，它仍然有钱；如果空着，它仍然空着。让我们思考一下这两种情况。

如果 B 中有钱，女孩只拿箱子 B，她得到 1 百万美元。如果她两个箱子都要，就会得到 1 百万加 1 千元。

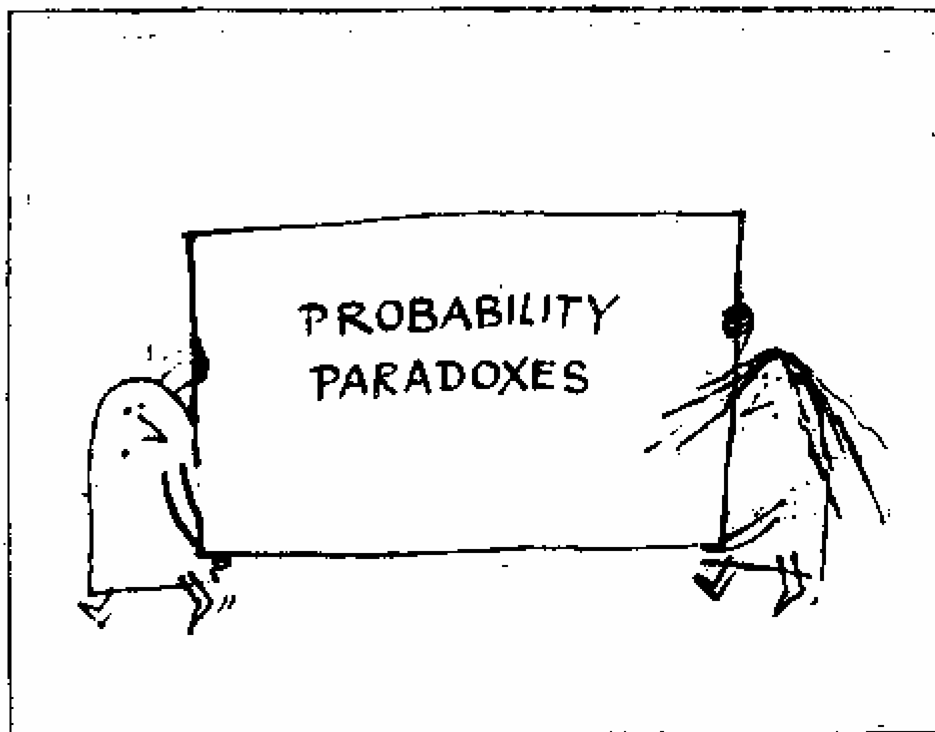
如果 B 箱空着，她只拿 B 箱，就什么也得不到。但如果她拿两个箱子，她就至少得到 1 千美元。

因此，每一种情况下，女孩拿两个箱子都多得 1 千元。

这条悖论，是试验一个人是否相信自由意志论的“石蕊试纸”类型的悖论。对这个悖论的反应公平地区分出，愿意拿两个箱子的是自由意志论信徒，愿意拿 B 箱者是决定论（宿命论）信徒。而另一些人则争辩道：不管未来是完全决定的，还是不是完全决定的，这个悖论所要求的条件却是矛盾的。

对这些争论观点的讨论可参见马丁·加德勒在 1973 年《科学美国人》7 月号的数学游戏专栏，以及诺吉克教授发表在同一刊物 1974 年 3 月号同一专栏的文章。由于这一悖论还未解决，故它是学生讨论的极好课题。你将发现课堂里对这个悖论的反应是活跃的，十分有益的。

第二章 概率论悖论



近来，几乎没有一个数学教师不知道概率对生活的重要，按约瑟夫·巴特勒的说法，概率是“生活的真正指南”，正如它是现代科学的每一学科的指南一样。可以肯定地预言，几年以后大学的数学学生将要学习更多的概率论，包括它在科学、技术和政府中的无限应用。

最近一本较为成功的普通数学教科书——哈洛尔德·雅可比的《数学—人类的魄力》就有很长篇幅介绍初等概率论。学生阅读这些材料，或者其他著名教科书中的同样内容，将会充实地阅读本书所需的真知灼见的背景知识，还可以向他提供充分理解本书内容所需的一切资料。

我们相信还没有深入学习概率论的学生在看了此书之后将被激起学习概率论的强烈愿望。在数学中没有任何一个其他分支有这么多例子能说明直觉会得出错误的结论，而正确的解答又与常识矛盾。当一个学生看到一个概率悖论时，他的第一个反应是不相信。他的第二个反应几乎肯定是想要清除疑云迷雾。自然，要是不学一点概率论这肯定是办不到的。

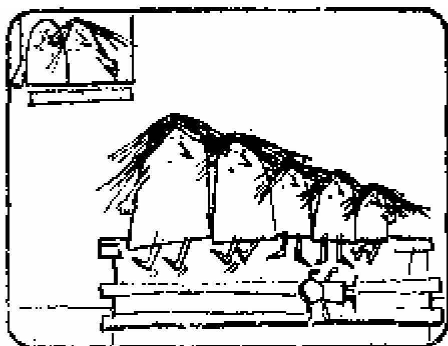
在本书中，我们除选取了一些基本问题之外，还选了一些与读者的经验最接近，最能引起兴趣的问题。用扑克牌和骰子做的简单游戏特别有吸引力。相反，我们避免了如量子力学这类科学领域的问题，这些东西尽管也充满悖论，可是它们远远超出了一般中学生的理解能力。

我们还力图尽可能清楚地作出每一个解答。这往往要列举一切可能的情况，使人们毫不怀疑解答的正确性。这类问题有很多都可以用公式或代数方法简便解出。不过，对于初学的学生，用较笨的方法解问题不仅容易些，而且还有助于深入体察问题的结构。一个已发生兴趣的学生将会找到时间来学会如何用更高明的方法解这类问题。

这本小册子的主要目的，是帮助你用小故事作阶梯来引导学生深入到概率论较深奥的内容中去。我们已努力写入尽可能多的背景知识，它们一则对课堂讨论有用，二则预先提出了一些较机灵的学生可能提出的问题。我们还附加了一些其他的与画片很接近的悖论，我们相信它同样有意思。

我们还花了一定力量建立很多使用扑克和硬币的悖论范例。这样问题就可按这种游戏来阐明，而不需要昂贵的教学设施。我们希望读者能发现这些问题的艰深。其中有些涉及到人们不了解的赌博游戏，这种游戏可能是激发起学生兴趣的基础。

1 · 赌徒的谬误

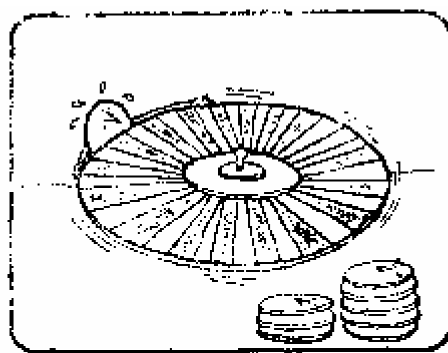


M：琼斯先生和琼斯太太有五个孩子，都是女儿。

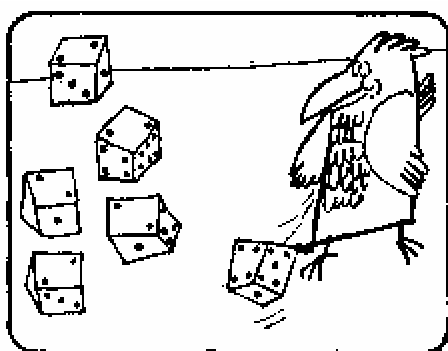
琼斯太大：我希望我们下一个孩子不是女孩。

先生：我亲爱的，在生了五个女儿之后，下一个肯定是儿子。

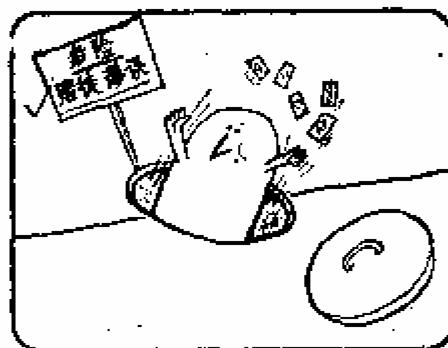
M：琼斯先生对吗？



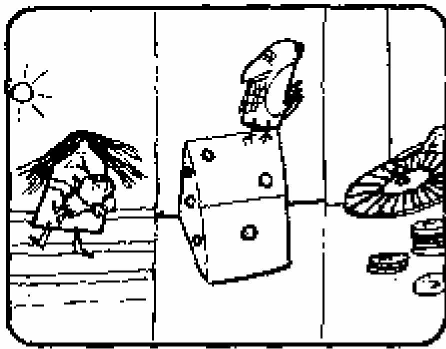
M：很多玩轮盘赌的赌徒以为，他们在盘子转过很多红色数字之后，就会落在黑的上，他们就可以赢了。事情将是这样进行的吗？



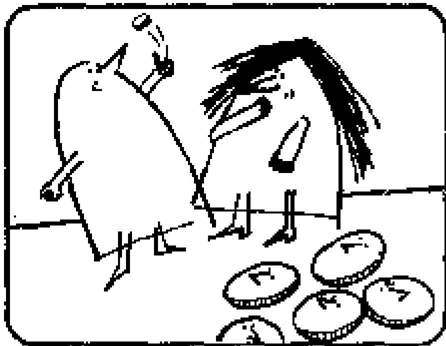
M：埃德加·阿兰·坡坚持认为，如果你在一轮掷骰子中已掷出五次两点，你下次再掷出两点的机会就要小于 1/6 了。他说得对不对呢？



M：如果你对任何这类问题回答说“对”，你就陷入了所谓“赌徒的谬误”之中。在掷骰子时，每掷一次都与以前掷出的点数完全无关。



M：琼斯先生和琼斯太太第六个孩子是女孩的概率仍然是 1/2。轮盘赌的下一次赌数是红色的概率仍然是 1/2。掷骰子时，下一次掷出 2 的概率仍然是 1/6。



M：为了让问题更明朗，假定一个男孩扔硬币，扔了五次国徽向上。这时再扔一次，国徽向上的概率还是完全与以前一样：一半对一半，钱币对于它过去的结果是没有记忆的。

如果事件 A 的结果影响到事件 B，那么就说 B 是"依赖"于 A 的。例如，你在明天穿雨衣的概率依赖于明天是否下雨的概率。在日常生活中说的"彼此没有关系"的事件称为"独立"事件。你明天穿雨衣的概率是和美国总统明天早餐吃鸡蛋的概率无关的。

大多数人很难相信一个独立事件的概率由于某种原因会不受临近的同类独立事件的影响。比如，第一次世界大战期间，前线的战士要找新的弹坑藏身。他们确信老的弹坑比较危险，因为他们相信新炮弹命中老弹坑的可能性较大。因为，看起来不可能两个炮弹一个接一个都落在同一点，这样他们就合理地认为新弹坑在一段时间内将会安全一些。

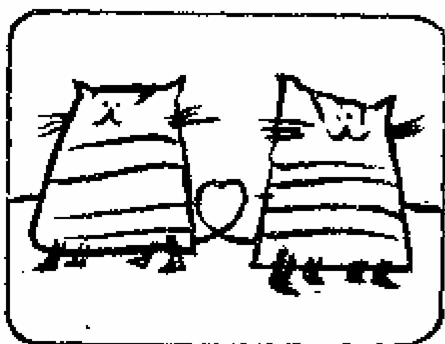
有一个故事讲的是很多年前有一个人坐飞机到处旅行。他担心可能哪一天会有一个旅客带着隐藏的炸弹。于是他就总是在他的公文包中带一枚他自己卸了火药的炸弹。他知道一架飞机上不太可能有某个旅客带着炸弹，他又进一步推论，一架飞机上同时有两个旅客带炸弹是更加不可能的事。事实，他自己带的炸弹不会影响其他旅客携带炸弹的概率，这种想法无非是以为一个硬币扔出的正反面会影响另一个硬币的正反面的另一种形式而已。

所有轮盘赌中最受欢迎的系统是戴伦伯特系统，它正是以赌徒未能认识到独立事件的独立性这一"赌徒谬误"为基础的。参与者赌红色或黑色（或其他任何一个对等赌金的赌），每赌失败一次就加大赌数，每赌赢一次就减少赌数。他们猜想，如果小小的象牙球让他赢了，那么就会有某种原因"记住"它，不太可能让他在下一次再赢；如果小球使他输了，这将感到抱歉，很可能帮助他在下一次赢。

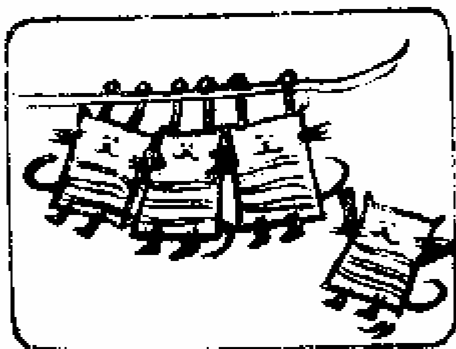
事实是每一次旋转，轮盘都与以前旋的结果无关，这就十分简单地证明了，任何一个赌博系统给赌徒的好处都不会比给赌场主的还多。约翰·斯卡恩在他的"赌博大全"一书中写道："当你象一般组织好的赌赛中常有的情况，你要因赌场主设赌而给他一定百分比的钱，故你赢的机会就如数学家所说的是负的期望。当你使用一种赌博系统时，你总要赌好多次，而每一次都是"负的期望"。绝无办法把这种负期望加成正的……"

埃德加·阿伦·坡写的骰子的笑话出在他的侦探故事的跋中，题为“玛丽·罗杰特之谜”。一粒骰子，一枚硬币，一个赌盘，或者任何一种随机装置，都会产生一系列独立事件，这些事件无论如何也不会受到这种装置过去状态的影响。如果你们总愿意相信某种赌徒谬误，那么一个有意义的课堂活动就是假装玩一次实际的以赌徒谬误为基础的赌博游戏。比如，一个学生可以反复抛掷硬币，只是在同一面出现三次之后，才与另一学生用扑克牌作筹码打赌。他总是赌硬币相反的那一面。换句话说，就是在三次出现国徽之后，他赌字；在三次出现字之后，他赌国徽。末了，比如说赌了 50 次，这时他手中的牌数绝不会正好与开始时一样多，但应该是差不多的。也就是说他赌赢赌输的概率是相等的。

2．四只猫的性别



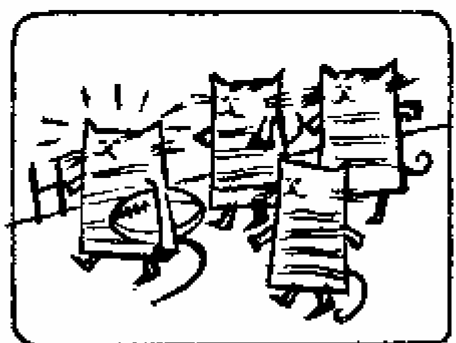
M：很容易作出错误的概率计算。这儿有两只猫已住在一起。



V_1：亲爱的，我们的新房舍中有几只猫？

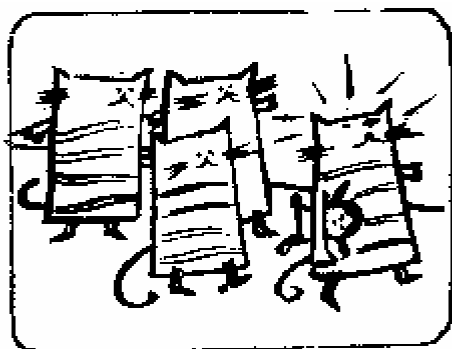
V_2：你不会数呀？四只，你这个笨蛋。

V_1：几只雄猫？

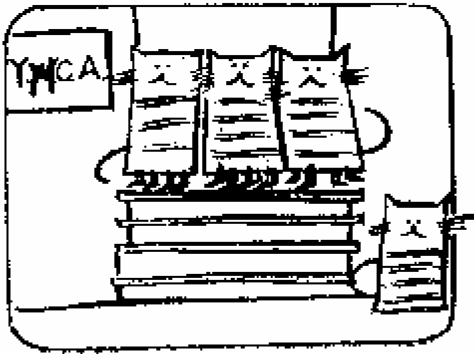


V_2：很难说，我也不知道呢。

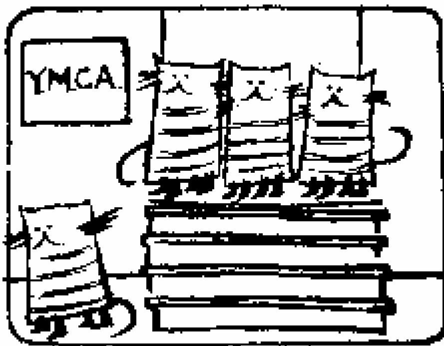
V_1：四只猫都是雄的不太可能。



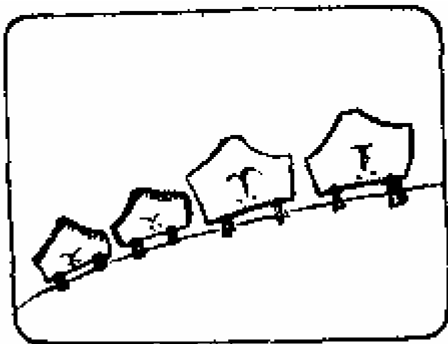
V_2：也不可能四只都是雌猫。



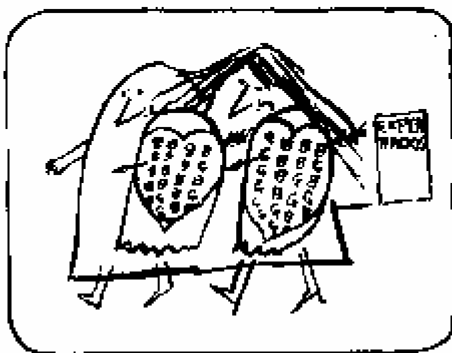
V_1：也许只有一只是雄猫。



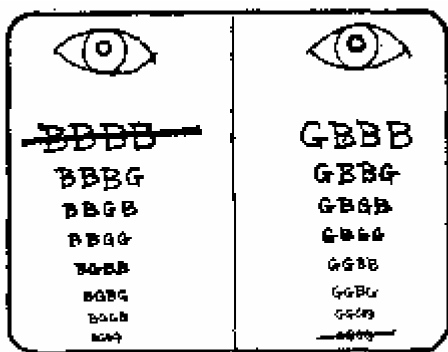
V_2：或许只有一只是雌猫。



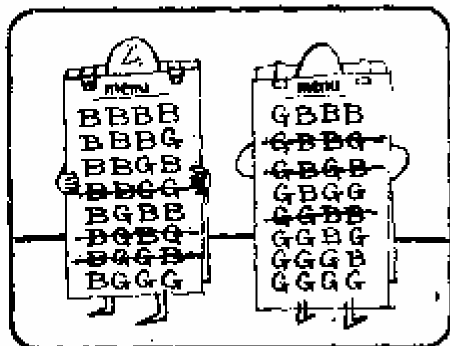
V_1：这也不是很难想出来的，亲爱的。每只猫是雄是雌的机会是一半对一半，所以很明显，最有可能的结果是两个雄的，两个雌的。你还不能把它们算出来吗？



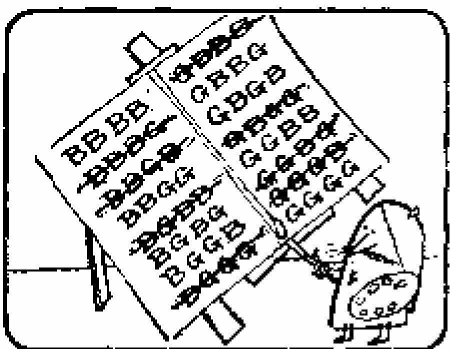
M：猫先生的理由对不对？
让我们来检验它的理论。用 B 表示雄猫，用 G 表示雌猫，这就很容易列出十六种同等可能的情况。



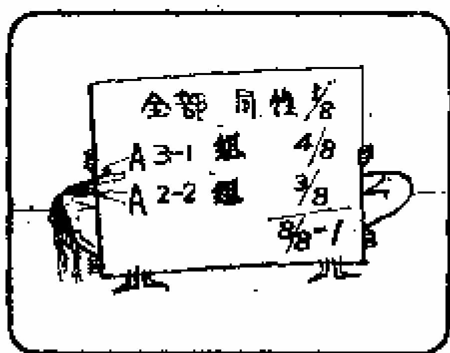
M：在十六种中只有两种是所有猫都具有同样性别，所以，这种情况发生的概率是 2/16，或 1/8。猫先生认为这种情况具有最低概率是对的。



M：现在，让我们检验一下 2—2 分配，猫先生认为这是可能性最大的一种。这种情况有六次，所以其概率是 6/16，或 3/8。这显然比 1/8 高。猫先生也许是对的。



M：可是，我们还有一个更大可能的情况要考虑：3—1 分配，由于这种情况有 8 次，其概率是 8/16，或 1/2。这就比 2—2 分配高。我们大概是搞错了吧？



M：如果我们算出的概率是对的，它们相加应等于 1。加一加果然为 1。这就向我们说明，三种情况都会发生，猫先生猜错了，最可能的情况是 3—1，而不是 2—2。

一家四个孩子最可能的情况是三个孩子是一种性别，另一孩子是另一种性别，而不是两个男孩，两个女孩，这一点使大多数学生感到惊讶。在班级里，用 4 个硬币反复抛掷很容易作出试验。将每次抛掷结果记录下来。在抛了 100 次之后，差不多有 50 次是 3—1 组合，而 2—2 组合大约是 33 次。

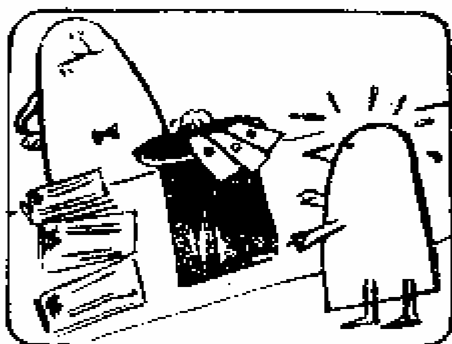
在做了这个练习之后，你也许希望给你的学生一项任务，决定在一个有五个孩子或六个孩子的家庭中不同性别组合的概率。由于这是令人乏味的工作，当他在列出所有组合时，你再向他介绍节省时间的公式就是最好的时机。

一个类似的问题是关于一手桥牌中四种花色的最可能分布，其答案也同样违反直觉。最不可能的情形自然是拿到同一花色的 13 张牌（你拿到这手牌的可能性是 158753389899 分之一）。可是最可能出现的情况是什么呢？

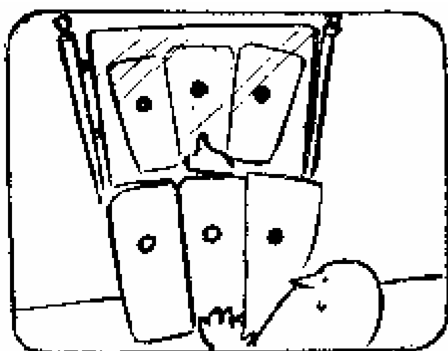
即使是很有经验的桥牌手也往往猜想答案是 4，3，3，3。这就错了。最可能的一手牌是 4，4，3，2。你可以期望这类牌大约要五圈拿到一次；而 4，3，3，3 这种分布则大约要每九圈或十圈才能拿一次。就是 5，3，3，2 这种分布也可能是每六圈拿一次。奥斯瓦尔德·雅可比写的《怎样预测手气》中给出了各种可能的花色分布概率表。较有才能的学生用袖珍计算器可以把证实雅可比的预测表当作一项有趣的工作。

在报纸上，你是不是会看到某人得到一手完满的桥牌的故事。得到这种牌的可能性小到要用天文数字来表示，因此故事几乎肯定是假的，要不，在玩牌人当中就有人着实在搞鬼，他偷偷地把牌安排好了。要不然就可能是刚拿出一副新牌，某人无意地作了两次完满的洗牌。完满的洗牌就是把这副牌严格对半分，然后两边的牌一张一张地交叠。洗两次后，这副牌就是四种花色顺次交错。这时无论怎样发牌，都得到四手完满的牌。

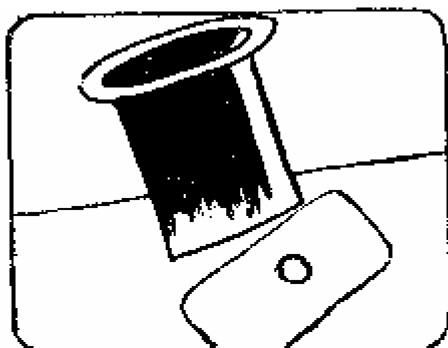
3 · 三张卡片的骗局



M：在很多赌博游戏中，若相信你对概率认识的直觉将会是不幸的。这里有一个用三张卡片和一顶帽子作简单的赌博例子，可以证明这一点。

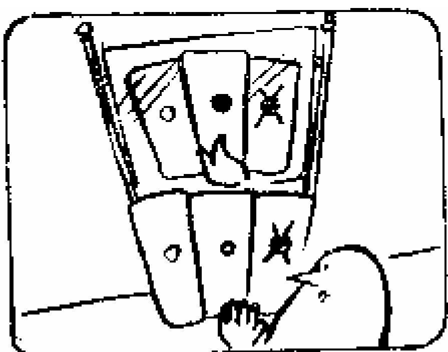


M：利用镜子反照可以比较容易看出卡片的组成。第一张卡片两面都是圆圈。中间那张卡片，一面是黑点，一面是小圈。最后一张则两面都是黑点。

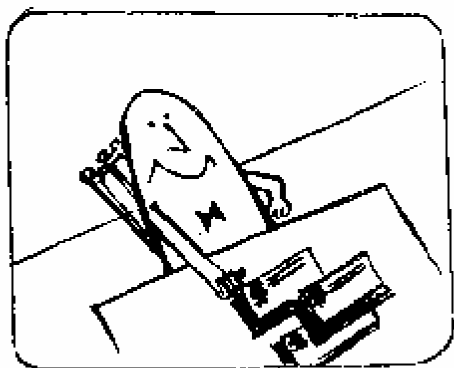


M：庄家把卡片放在帽子里摇晃，让你取一张。把它放到桌子上。然后，他与你以对等的赌金，打赌下面两圈点是和上面的一样。

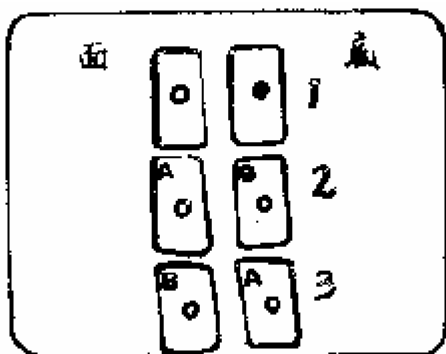
我们假定你取出的卡片上是小圈。



M：庄家为了哄你，让你以为这个赌博是公平的，就说你的卡片不可能是黑点—黑点卡。因此，它要么是小圈—小圈卡，要么是黑点—小圈卡。下面的不是黑点，便是小圈，所以你和他赢的机会相等。



M：要是这个游戏是公平的，庄家怎么会这样快就赚了你的钱呢？这是因为他的话是骗人的。实际情况是 2 比 1 对他有利。



M：关键是同样可能的情况有三种，而不是两种。抽出的卡片可能是小圈—黑点，或者是 A 面向上的小圈—小圈，也可能是 B 面向上的小圈—小圈。底面与上面一致的情况有两种。因此，在玩了多次以后，庄家就会是大约三回里赢两回。

这个卡片游戏是沃德·威弗设计的，沃德是著名的数学家，信息论的建立者之一。他曾在 1950 年 10 月《科学美国人》关于“概率”一文中介绍过这个内容。

下面是对这个赌戏的真实情况的—种说明。三张卡片中有两张是两面圈点一样的。如果你从帽子中随机地取卡片，那么你得到这种两面圈点一致的卡片的概率是 2/3。因此，抽出的卡片与上面圈点相同的概率就是 2/3。

卡片游戏是称为伯特纳德箱的悖论的翻版。在伯特纳德以后，一位德国数学家将它写进一本书中，于 1889 年发表。伯特纳德设想有三个箱子。一个装着两枚金币，一个装着两枚银币，一个装一枚银币一枚金币。三个箱子混杂，然后随意取一个箱子，显然这个箱子里装着两个一样的钱币的概率是 2/3。

然而，假定我们从选出的箱子中拿出一枚钱币，看到它是金的。这就是说，箱子里的不可能是两枚银币。因此，它必然是两枚金币；或一枚金币，一枚银币。由于这两个箱子中任何一个被选中的机会相等，看起来似乎我们取得两枚同样钱币的概率降到了 1/2。如果我们取出的是银币，也会得出同样的结论。

取出箱中的一枚钱币看一看，怎么就改变了箱中装两枚同样钱币的概率呢？显然这是不可能的，这样就说明了上面错在哪里。

这里有一个相关的悖论学生们是会觉得很有意思的。如果你抛掷三枚硬币，它们掉下来后完全一致的概率是什么？三个当中至少有两个是—样的，另外那个要么与这两个一样，要么就是不同的。由于它出现这两种情况的机会均等，故它与另两个硬币是否一致的机会就是相等的。这样，看起来所有三个硬币都一样的概率就是 1/2。

我们只要将八种可能的情况列表如下，就可表明这种推论是错的：

HHH　THH
HHT　THT
HTH　TTH
HTT　TTT

看得出来，只有两种情况是三个硬币都取同样花纹。因此正确的概率应是2/8=1/4。

另一个出人意料的小悖论也是由于在考虑所有可能的情况时发现错误而引起的。说的是一个男孩有一个玻璃球，一个女孩有两个玻璃球。他们向竖在地上的一根立柱弹球，玻璃球最接近立柱者胜。假定男孩和女孩技巧完全相同，测量也足够精确而不会引起纠纷。女孩赢的概率是什么？

观点一：女孩弹两个玻璃球，男孩只弹一个，因此女孩赢的概率是 2/3。

观点二：把女孩的玻璃球叫做 A 和 B，把男孩的叫做 C，就有四种可能的情况：

（1）A 和 B 都比 C 更接近立柱。

（2）仅 A 球比 C 球接近立柱。

（3）仅 B 球比 C 球接近立柱。

（4）C 球比 A 和 B 都接近立柱。

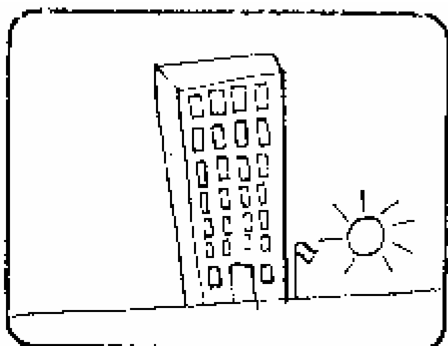
这四种情况中三种都是女孩赢，所以女孩赢的概率是 3/4。

为了解决这个问题，我们列出全部可能的情况，它是六种而不是四种。按三个球接近立柱的次序，使最近者在前，列表如下：

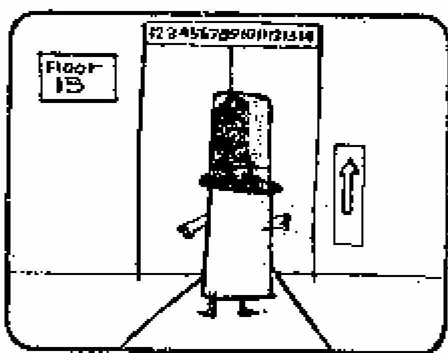
A B C
A C B
B A C
B C A
C A B
C B A

在六种情况中有四次是女孩赢。这就证明了第一种观点对，女孩赢的机会是4/6＝2/3。

4 · 电梯悖论

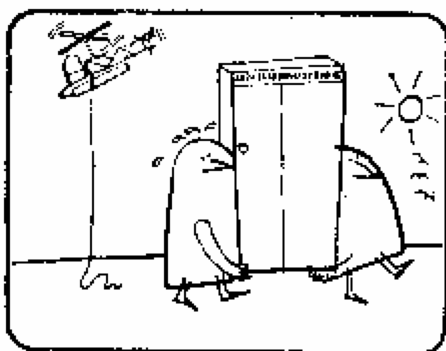


M：人们乘坐电梯往往为另一个奇怪的概率悖论而感到迷惑不解。我们假定在这幢大搂里，电梯运行是独立的（即与任何人无关），在每层楼停留的时间均等。

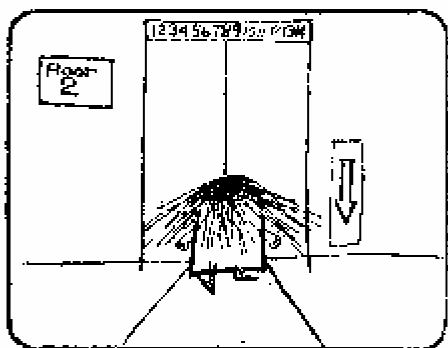


M：高先生的办公室靠近顶层，他非常恼火。

高：真见鬼，我等乘电梯下楼已经等了五分钟了，所有停下的电梯都是要上楼的。老是这样。

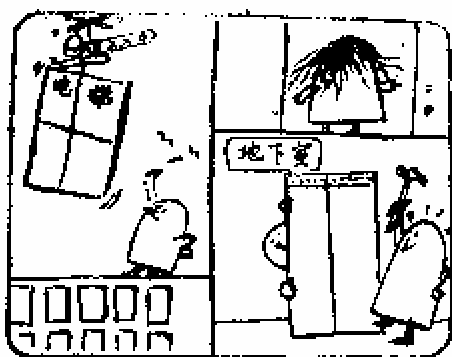


高：说不定他们是在底层做好电梯，待电梯升到顶层时，再将它从房顶用直升飞机运走呢！

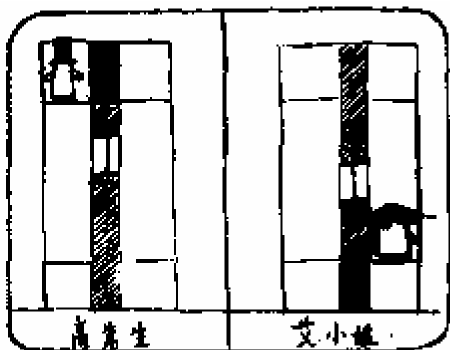


M：艾小姐在接近底层的办公室工作。她每天要到顶层的餐厅吃午饭。她也很恼火。

艾：我真不明白。不管我什么时候等电梯，停下的电梯多数是要下楼。



艾：他们肯定是先把电梯弄到顶层，然后把它打发到地下室存起来了。



M：用一个简单的图可以排除这团迷雾。对于高先生而言，电梯间里只有上端黑色区中的电梯才下楼。这个区比阴影区小，因此电梯在他那层楼从下面往上跑的概率要高得多。你现在看得出，在艾小姐的情况下这一推论同样起作用了吧？

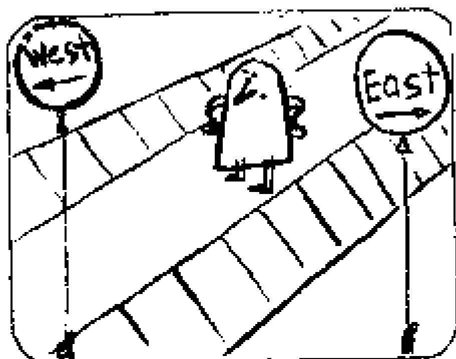
电梯悖论首先出现在一本物理学家乔治·伽摩和他的朋友马文·斯特恩写的书——《数学之谜》中。在用一个电梯说明这个悖论时，就象我们前面那样，伽摩和斯特恩犯了一个小错误。他们认为，如果电梯不止一架，概率“自然还是同样的”。

斯坦福大学的计算机科学家首先认识到这个错误。他在 1969 年 7 月的《娱乐数学杂志》上写了一篇文章“伽摩—斯特恩电梯问题”。他指出，当电梯增加后，在任何一层碰到电梯上楼和下楼的概率都接近 1/2。

这种情况在一定程度上是比原来的悖论更令人感到矛盾了。这意味着，如果你在接近顶层等电梯，并只注意其中一个电梯门的话，那么将要到的那台电梯可能上楼的概率较高。可是，如果不管那个电梯间的电梯都可以上，则将要到达的那台电梯上、下楼的概率就不问了。这个概率在电梯数目接近无限时就接近于 1/2。停在接近底层的电梯可能下楼的概率也是同样的。

自然，我们假定电梯的运行彼此无关，它们的速度相等，且在每层楼的平均等待时间相等。如果电梯只有少数几台，则概率稍有偏离。但如果有 20 台，则对所有各层来讲，上、下楼的概率就非常接近 1/2 了，自然最顶层和最底层除外。

5 · 女朋友的烦恼



M：你听说过一个青年无法决定看哪个女朋友好的事吗？他有两个女朋友，一个住在东城，一个住在西城。他每天不定什么时候要去地铁车站一次 · 坐上最早碰到的列车。

列车时刻表

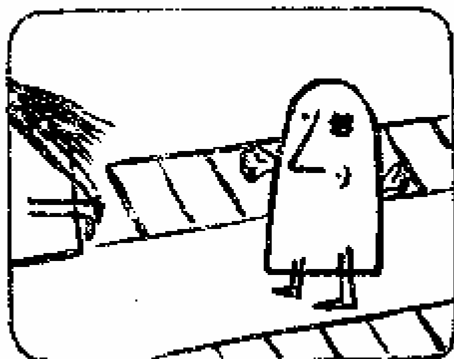
向东	向西
12:00	12:01
12:10	12:11
12:20	12:21
12:30	12:31
12:40	12:41
12:50	12:51

M：向东的列车和向西的列车都是十分钟到一次。



M：有一天晚上，东城的姑娘说：

V_1：我真快乐，你十天里就来看了我九次。



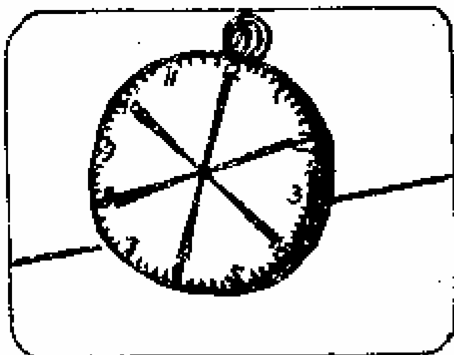
M：又一天晚上，西城的姑娘十分生气：

V_2：怎么回事？你十天才来看我一次！

列車时刻表

向東	向西
12:00	12:01
12:10	12:11
12:20	12:21

M：这种奇怪的现象就跟电梯的情况一样。尽管所有列车都隔十分钟到站，可是运行时刻表编得使西去的列车比东去的列车总是晚到一分钟。



M：为了赶上西去的列车，这个青年必须在一分钟间隔内的某时到达，如图中画的表之的阴影部分。要赶东去的列车，这个青年就需在九分钟间隔内的某时到达，如这只表上的白色部分。显然，向西去的概率就只有 1/10，往东的概率是 9/10。

在这—结论中，两趟列车之间的等候时间由运行时刻表决定。在一连串随机事件中，两次事件之间的“平均等候时间”是通过把几次等候时间相加，再除以几得到。例如，这个青年等候东去的列车，平均时间应是 4 分，他要往西，平均等候时间是半分钟。

还有其他很多关于等候时间的悖论。这里有一个学生们喜欢思考的悖论。在抛硬币时，出现国徽（或字）的平均等候时间（或次数）是两次抛掷。这就是说，如果你把抛掷硬币的结果依次列出，并计算每两次国徽之间的时间（即次数），则两次国徽之间的抛掷次数（第一次国徽不算在内，但包括第二次国徽出现的那次）是两次。

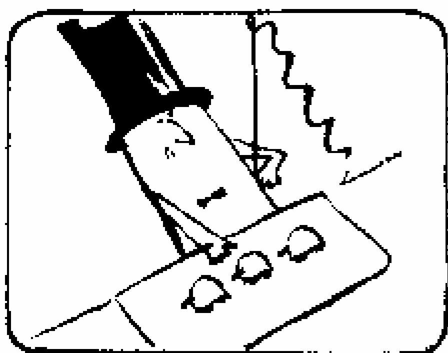
假如你把很多次钱币抛掷结果列成直行表。随意在两个相邻的结果之间选一点（或许是闭上你的眼睛划一条横线）。找出这一条线上面和下面最近的国徽，并计算出从一次国徽到另一国徽之间包括的抛掷次数。如果你将这一工作重复多次，国徽之间的平均次数是几？

根据直觉，答案似乎是 2 次。实际上却是 3。理由就跟那个青年老是赶上东去的列车一样。两次图案之间有时抛掷次数多，有时次数少。你随便划的线就像那个青年在任意时间到达地铁车站一样。这条线划在抛掷次数多的两国徽之间比次数少的国徽之间具有更多的可能性。

如果我们另用一种算法，即从划出的线向两边数，那么，由于钱币抛掷的结果与它以往的抛掷结果无关，于是从划线的地方往上数或往下数，按照上面平均等待时间（次数）的概念，可知要平均扔两次才出现国徽，故两个国微都算在内时，抛掷次数为 2*2=4 次。但我们规定是只算一个国徽，故应为 4-1=3 次。

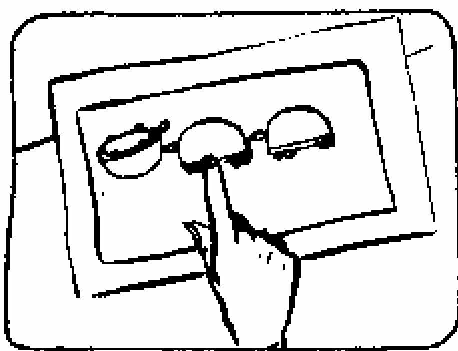
将此问题与轮盘赌比较将得出更惊人的结果。轮盘上有 38 个数，包括 0 和 00 在内。对于某个给定的数，比如说 7，平均等候时间是 38 次旋转。可是，如果你把旋转结果依次列出，在上面任意打点，那么该点所在的最挨近的两个 7 点区间中的平均点数就不是 38，而是 2*38-1=75 次。

6 · 三个贝壳的骗局

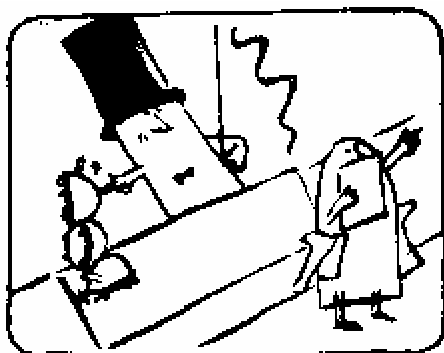


庄家：快来！看看你猜不猜得着哪个贝壳下有绿豆？如果你说对了，让你的钱变多一倍。

M：在玩了一阵之后，马克先生断定，他最多只能三次里赢一次。



庄家：不要走，马克先生。我让你破例玩这个游戏。你随便选一贝壳，我再翻开一个空贝壳，这样，绿豆肯定在另外两个贝壳中的一个里，这时你赢的机会就增加了。



M：可怜的马克先生很快就输光了。他没有认识到翻开一个空贝壳根本不影响他赢的机会，你知道怎么回事吗？

在马克先生选出了一个贝壳之后，至少有一个剩余的贝壳肯定是空的。由于操纵者知道他把绿豆放在哪一个贝壳下面，他就总能翻开一个空贝壳。因此，他这样做对于马克先生修改他挑到正确贝壳的概率没有增添任何有用的信息。

你可以在教室里用一个黑桃 A 和两张红 A 证实这一点。将三张牌混合起来，然后把它们放在桌上成一排。让一个学生指出一张牌。他指着黑桃 A 的概率是多少？显然是 1/3。

现在，假定你偷看了你的牌，并在学生指定了一张牌后翻开一张红 A。此时你就可以像那个贝壳游戏的操纵者—样作如下讨论：现在只有两张牌，黑桃 A 就是这两张中的一张。因此学生取得黑桃 A 的概率似乎已增加到 l/2。而实际上，它仍然是 1/3。因为，按照假定，学生虽已指定了一张牌，你则总是能翻开一张红 A，翻开它根本不能对概率增加任何新信息。

如果像下面那样改变一下这个游戏，就可能引起一场热烈的课堂讨论。不是

由你偷看两张未选定的牌来保证你翻开一张红 A，而是先让学生指定一张牌，然后让学生翻开剩下的两张之一。若他翻开的是黑桃 A，则这一回就不算数，重新再玩一次。只有他翻开的是红 A 时才看他指定的是什么牌。这样玩法，试问他指定的牌为黑桃 A 的概率是否增大了呢？

奇怪得很，这回概率的确增大到 1/2。我们用下面介绍的取样方法就可看出其中的原因了。把牌的位置叫做 1，2，3。不妨假定学生指出的牌在位置 2，并假定翻开了第 3 张牌。它是红 A。

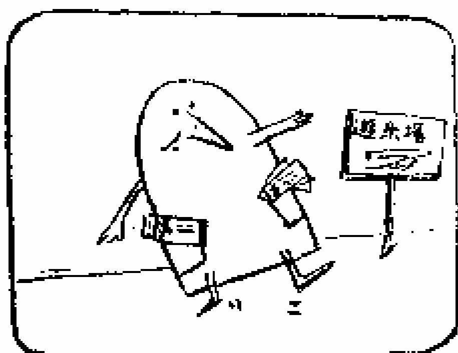
这三张牌共有六种同等可能的排法：

1．♠A ♥A ♦A
2．♠A ♦A ♥A
3．♦A ♠A ♥A
4．♦A ♥A ♠A
5．♥A ♠A ♦A
6．♥A ♦A ♠A

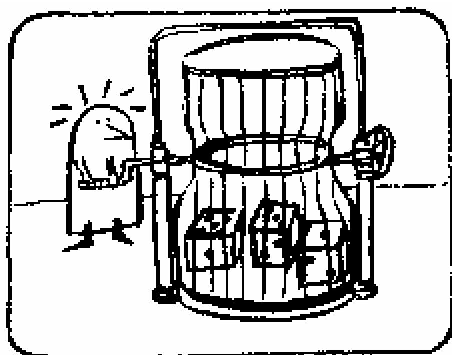
如果他翻开的第三张牌是黑桃 A，这一盘就算无效，因此第 4 和第 6 种情况就不算数，得把它们排除以外。在剩余的四种情形（1，2，3，5）中，第 2 张牌是黑桃 A 就有两种可能。因此他指出黑桃 A 的概率就是 2/4=1/2。

这个结果与学生具体指定的是哪张牌，翻开的又具体是哪张牌毫无关系。如果允许马克先生取出要翻的贝壳，并要求翻开的是空的，那么他取得有绿豆的贝壳的概率就会从 l/3 变到 1/2。

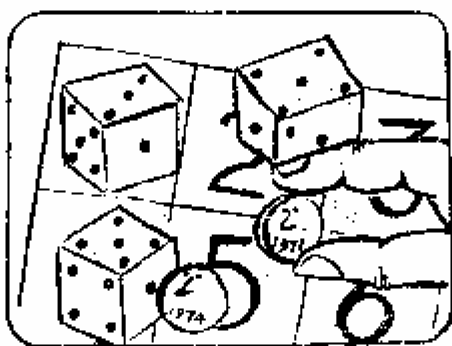
7 · 碰运气



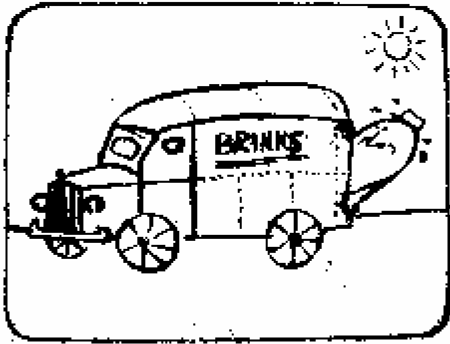
M：下一次你去游乐场，可别参加"碰运气"游戏！很多人去玩这种游戏都上当了，因为他们以为他们不会失误的。



M："碰运气"游戏是在一个笼子里装着三个骰子，翻转摇晃笼子就使骰子滚动。玩的人可以赌从 1 到 6 任何一个数，只要一个骰子出现他说的数时，他就得到他赌的钱数。参与者往往这样想：如果这个笼子里只有一个骰子，我赌的数就只能在六次中出现一次。如果有两个骰子，则六次中就会出现两次。有三个骰子时，六次中就会有三次赢，这是
对等的赌博！



M："可是，我的机会还要好一些！如果我赌一个数，比如 5，赌一块钱。要是有两个骰子点数是 5 的话，我就赢两块钱；若是三个骰子都是 5，我就赢 3 块。这个游戏肯定对我有利！"



M：由于主顾这样想，难怪赌场操纵者会变成百万富翁！你能说明为什么“碰运气”游戏会使赌场主赢得大笔赌金吗？

“碰运气”是在美国和海外很多赌场中玩的赌戏。在英国，这种赌博可追溯到十九世纪初，当时称为“汗巾”。近来称为“鸟笼”。在英国和澳大利亚的酒馆，这种赌博的三个骰子上印的是一个黑桃，一个方块，一个红心，一个梅花，—个王冠，一个锚，并称为王冠和锚。

在游乐场中，操纵者为招徕顾客而高声叫道：“每次三个人赢，三个人输！”这给人一个强烈印象，好像它是公平的。可是如果三个骰子每次显出的数字都不相同，则这种赌戏确实是公正的。在每摇一次笼子之后，操纵者就可从三个输家手中赢三块钱（假定每次赌一块钱），付给三个赢家三块钱。可是，操纵者所幸的是，常常在两个或三个骰子上显出同样的数。如果有两个骰子是同一个数，那么他收进四块钱·付出三块线，赚回一块钱。如果有三个骰子是同样的数，则他就收进五块钱，付出三块钱，赚回两块钱。正是这些双重数和三重数使赌场老板赚了大钱。

用公式来计算赌场主赢的比例是件需要技巧的工作。普通的学生最好是把三个骰子落下的全部 216 种可能情况全部列出。这时，他们会发现其中只有 120 种情况是三个骰子的点数不同，90 种是两个点数一样，6 种是三个点数都一样 [*]。假定这个赌戏玩了 216 次，产生了所有 216 种结果。每一次游戏，六个人对六个不同的数各赌一块钱。赌场主在 216 次赌博中收集到 216*6＝1296 块钱 [†]。

当三个骰子点数不同时，他得付出 6 块钱（三个赢家每人两块钱），总共 120 个这种情况，故他付出 6*120=720 块钱。当出现两个骰子的点数相同时（总共有 90 种情况），他须付给一个点数的人 2* 90=180 块钱。付给有两个一样的点数的人 3*90=270 块钱。当三个骰子都是一个点数时（共六种情况），他须付出 6*4=24 块钱。这样，他总共付出 1194 块钱，净赚 102 元。

将 102 元除以 1266 元，得出赌场主的利率为 7.8+%。这就意味着，他可以期望在一段长时间赌博之后，对每一赌徒的 1 块钱赌金，他将会得到 7.8 分多一点。一个赌徒压赌的任何一个数，在 216 种情况中，只有 91 种情况是他这个数至少出现一次 [‡]，所以他赢得一块钱的概率是 91/216，比 1/2 小得多。

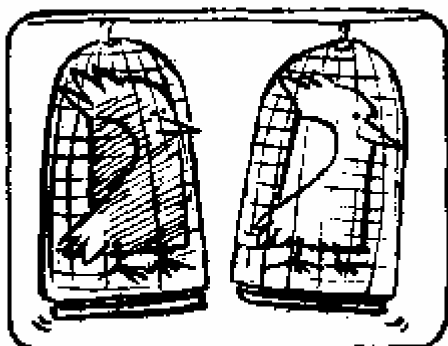
---

[*] 这个结果可以用排列组合公式来计算，三个骰子点数不同，可看作三个骰子分别取 1 到 6 六个数字的排列：A_6^3=6*5*4＝120。三个骰子中两个点数一样，可看作三个骰子取 1 到 6 中的两个数字的排列，两点数为单的骰子可轮流取为三骰子中的一个，共三种，故这个数目是 3*A_6^2=3*6*5=90。三个骰子点数全同只有 1 到 6 六种，总共是 216 种情况。另外一个算法是：三个骰子每个可以取 1 到 6 六个数的组合是 6*6*6=216——译注

[†] 玩赌时，聚赌者每人拿出一块钱。他若赢，就拿回两块钱，他若输，就失去这块钱。——译注

[‡] 这可以计算如下：当他选中一个数时，有三种赢的情况：第一，三个骰子都是他选的数，此时只有一种可能。第二，三个中有两个骰子是他选的数，此时另一个骰子取其他五个数中任何一个，而单独数的那个骰子三个轮流有三种，故数目是 3*5=15。第三，只有一个骰子是他要的数，此肘其他两个骰子可以是其余 5 个数中任何一个为 5*5=25 个·但三个骰子每一个都可取他要的数，故总共是 3*25=75 种。上述三种情况共 75+15+1＝91 种。——译注

8 · 鹦鹉之谜

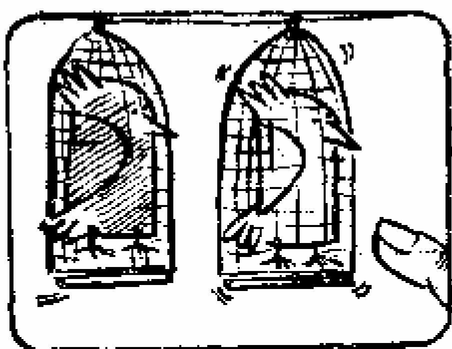


M：一位夫人有两只鹦鹉。一天一个来访者问她。

来访者：“有一只鹦鹉是雄的吗？”

夫人：“对，有一只是雄的”。

M：两只鹦鹉都是雄的概率是几呢？

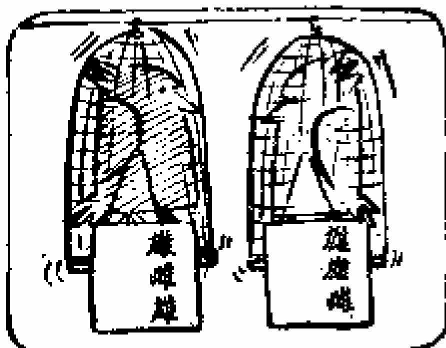


M：假定那个人问另一个问题：

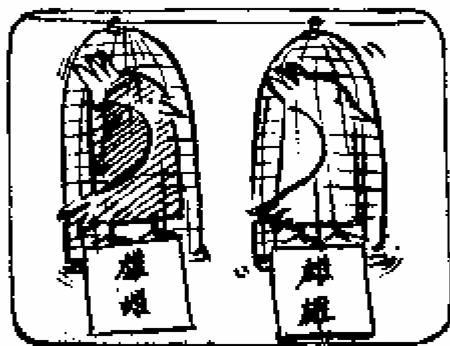
来访者：绿鹦鹉是雄的吗？

夫人：是。

M：现在，两只鸟都是雄的，概率提高到 1/2。为什么一问到绿鹦鹉是不是雄的就改变了概率？



M：这条悖论在把一切同等可能情况都列出之后，就很容易解释了。当这个人问是否有一只鹦鹉是雄的时，有三种可能的情况要考虑到。其中只有一种是两只都是雄的，所以这种情况的概率是 1/3。



M：可是，在这个人问绿鹦鹉是否雄的时，就只有两种情况要考虑。其中一种是两只都是雄的，所以这种情况的概率是 1/2。

现在可用两个硬币来模拟鹦鹉问题，一个用 2 分的硬币，一个用一分的硬币，让一个学生抛掷，然后就其结果作出某些论断。该学生可以采取几种做法：

1 · 如果两枚硬币都是国徽，他说：“至少有一枚硬币是国徽。”如果两枚硬

币都是字，他说："至少有一枚硬币是字。"如果两枚硬币不相同，他说："至少有一枚是……。"（国徽和字由他随便说一个）。无论他说的是什么，两个硬币都是一样的概率是什么？是 1/2。

2·这个学生进而又同意只是在出现国徽时才叫："至少有一枚硬币是国徽。"如果没有一枚硬币是国徽，他就什么也不说，重来一次。这时，两枚硬币那是国徽的概率是多少？1/3（因为现在两枚都是字的情况已排除在外了）。

3·学生进而又同意按一分硬币落下的情况较，即按一分硬币的国徽朝上或字朝上叫。这时，两个硬币一样的概率是多少？回答 1/2。

4·学生又同意这样叫：只当一分的硬币是国徽时才叫："至少有一枚是国徽。"这时两枚硬币都是国徽的概率是多少？回答：1/2。

好一点的学生不用试验就可作出正确回答。你的班级一定高兴做几次实际试验来验证这些答案。

鹦鹉悖论有时在教科书中以一种含糊的方式给出，结果不可能有正确回答。例如，你假定碰到一个陌生人，他说："我有两个孩子，至少有一个是男孩。"那么两个孩子都是男孩的概率是几？

这是一个定义得不准确的问题，因为你对使这个人说出上面那些话的环境一无所知，很可能是这样：如果他两个孩子性别不同，他就随便挑一个说，或许他说过"至少有一个是女孩。"也可能两个孩子都一样，则他就如上面那样说出他们的性别来。如果他是这样的过程，则二者一样的概率就是 1/2。情况同上面的第一种。

画中顾客用提问方法消除了模糊：顾客第一次问道"至少一只鸟是雄的吗？"相应于上述第二种情况。他第二次又问："绿鸟是雄的吗?"对应了第四种情况。

还有一个使人惊愕的悖论，与鹦鹉悖论很有关系，叫做第二张 A 的悖论。假定你正在玩桥牌。在发完牌时，你扫视一下手中的牌，宣布："我有一张 A。"那么你还有一张 A 的概率是多少？它是严格的，小于 1/2。

现在假定，大家一致同意专指一张 A，比如果桃 A，桥牌一直打到你可以叫："我有一张黑桃 A"时，你还有一张 A 的概率是几？这，稍高于 1/2！为什么指定了 A 的花色就改变了概率？

对一手牌的全部可能作出计算是冗长乏味的，不过若把一手牌减为四张，就可以理解这条悖论的奥妙了。比如说这四张牌是黑桃 A，红心 A，梅花 2 和方块 J（通过减少其元素个数来简化问题往往是了解其结构的绝妙方法）。洗一洗这四张牌，把它发给两个人，两张牌一手有六种同等可能的情况。

♠A ♥A
♠A ♦J
♠A ♣2
♥A ♦J
♥A ♣2
♦J ♣2

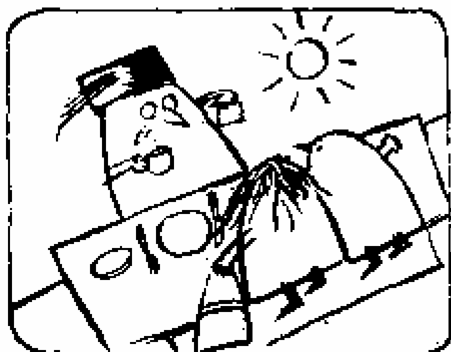
六手牌中有五手（即前五手牌）都使玩牌者可以说"我有一张 A"。但五手牌中只有一手是还有一张 A 的，结果有第二张 A 的概率是 1/5。

上面有三手牌（即前三手牌）使玩牌人可以宣布："我有一张黑桃 A"。这三手中只有一手是有另一张 A 的，两张 A 的概率是 1/3。

这样变一下就很简单了，课堂上可以验证一下，比如说，将这四张牌洗、发五十次，全部记录下来。如果一个学生知道了它的公式，又有小计算器，他也许高兴对整副牌来试解上面的问题。

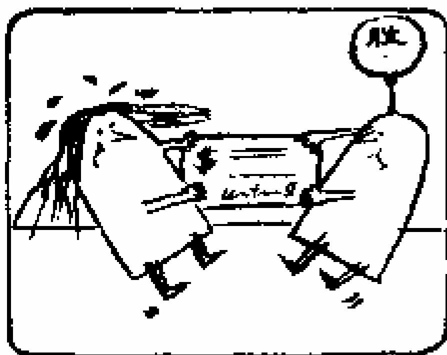
注意，要叫的 A 和叫牌的人都必须预先定好，如果这些假定未事先定好，问题就不明确确定。

9·钱包游戏

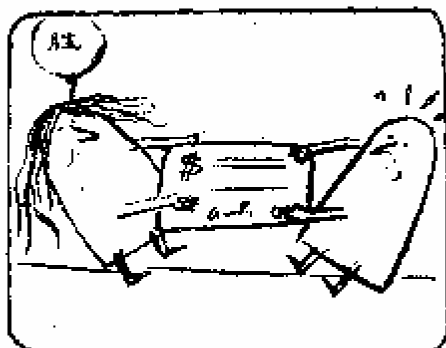


M：史密斯教授和两个数学学生一起吃午饭。

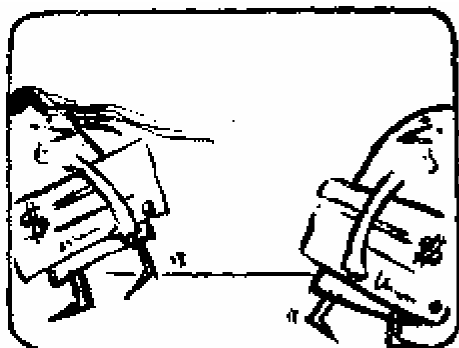
教授：我来告诉你们一个新游戏，把你们的钱包放在桌子上，我来数里面的钱，钱包里的钱最少的那个人可以赢掉另一个人钱包里的所有钱。



乔：呣……，如果我的钱比吉尔的多，她就会赢掉我的钱，可是，如果她的多，我就会赢多于我的钱，所以我赢的要比输的多。因此这个游戏对我有利。



吉尔：如果我的钱比乔多，他就会赢掉我的钱。可是，如果他的钱比我的多，我就可以赢，而我赢的比输的多，所以游戏对我有利。



M：一个游戏怎么会对双方都有利呢？这是不可能的。是不是因为两个参与者都错误地设想他赢和输的机会是相等的，因而产生了这个谬论呢？

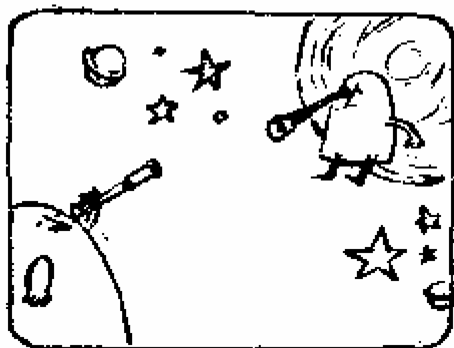
这个有意思的悖论出自法国数学家莫里斯·克莱特契克，在他的《数学消遣》书中用领带代替钱包：

“有两个人都声称他的领带好一些。他们叫来了第三个人，让他作出裁决到底谁的好。胜者必须拿出他的领带给败者作为安慰。两个争执者都这样想：我知道我的领带值多少。我也许会失去它，可是我也可能赢得一条更好的领带，所以这种比赛是对我有利。一个比赛怎么会对双方都有利呢？”

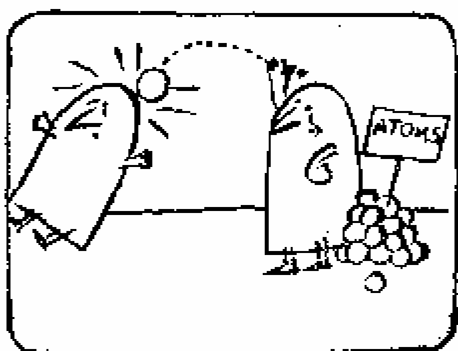
很容易表明，如果我们做出一个明确的假定来准确地限定条件，它就是一个公正的比赛。当然，如果我们已经得知比赛中的一个人总爱带较少的钱（或系较便宜的领带），那么我们就知道这个比赛是不公平的。如果无法得到这类消息，我们就可以假定每一个比赛者带有从 0 到任意数量（比如说一百元）的随便多少钱。如果我们按此假定构成一个两人钱数的矩阵（这是克莱特契克在他的书中列出的），我们就可看出这个此赛是“对称的”，不会偏向任何一个比赛者。

可惜，这不可能告诉我们上面两个比赛者的想法错在哪里。我们没有找到一种方法能够以此较简单的方式澄清这个问题。克莱特契克也没能做到，就我们所知，对这个比赛没有其他参考材料了。如果你们当中有任何人能想出一种办法，不用深入到高深的对策论就可说清楚上面两个比赛者的想法错在哪里，你愿写信告诉我们吗？我们就可以在这本书的下一版利用这一解释了。

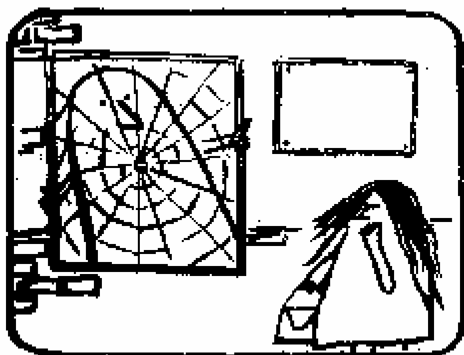
10 · 中立原理



甲：火星上有人吗？



乙：世界会发生一场核战争吗？



M：如果你回答这类问题时说，肯定和否定是同样可能的，你就笨拙地应用了一个名为“中立原理”的东西。不小心使用了这一原理使很多数学家、科学家、甚至伟大的哲学家陷入糊涂之中。

经济学家约翰·凯恩斯在他著名的《概率论》一书中把“理由不充足原理”更名为“中立原理”，说明如下：如果我们没有充足理由说明某事的真伪，我们就选对等的概率来定每一事物的真实值。

这个原理在科学、伦理学、统计学、经济学、哲学和心理学等多种领域中的应用已有很长一段历史，因而声名狼藉。法国天文学家、数学家拉普拉斯有一次曾以这个原理为基础计算出太阳第二天升起的概率是 1/1826214。

现在让我们看看，如果把这个原理应用于上述的火星和核战争问题，将引起怎样的矛盾。火星上可能有某种生命形式的概率是多少？我们应用中立原理就得到答案。在火星上连简单的植物生命都没有的概率是多少？同样，我们答道：。没有单细胞动物的概率呢？也是。那么火星上既没有简单的植物生命，也没有单细胞动物的概率是几？按照概率定律，我们必须用乘答案是。这既意味着在火星上有某种形式的生命的概率就升高到 1-=,这就与我们原来的估计值相矛盾了。

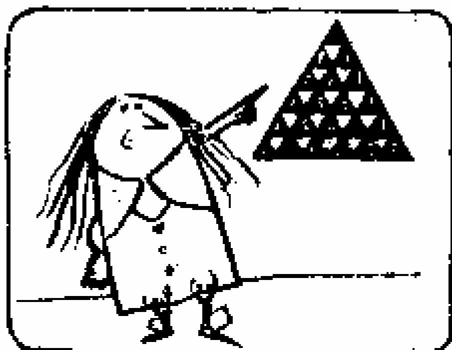
在公元 2000 年内发生核战争的概率是多少？根据中立原理，我们回答是。那么原子弹不会落在美国国土上的概率是多少？回答是。苏联不会受原子弹轰炸的概率是多少？。法国不受原子弹轰炸的概率？。如果我们将这一理由应用到 10 个不同的国家，则原子弹不会轰炸其中任何一个国家的概率就是的 10 次方，即。用 1 减这个数就得到原子弹会炸到 10 个国家中任何一个国家的概率——。

另一个不小心用了中立原因的好例子是未知立方体的悖论。假定你知道有一立方体，藏在一个柜子里，其边长是 2 尺到 4 尺之间。既然你没有任何理由认为它的边长是比 3 尺短或 比 3 尺长，那么你认为此立方体的边长是 3 尺就是最好的估计。现在来考虑这个立方体的体积。它必然是在 2^3=8 尺 ^{3} 到 4^3 =16 尺 ^{3} 之间。同样，既然你没有任何理由认为其体积比 36 尺 ^{3} 少或比 36 尺 ^{3} 多，那么认为 36 是该立方体的体积就是最好的估计。换句话说，你对这个立方体最好的估计是边长为 3 尺，体积为 36 尺 ^{3}，这该是一个多么奇怪的立方体啊！换一种方法，如果你把中立原理应用于立方体的边长，则你得到边长为 3 尺，此时体积为 27 尺 ^{3}。但若把它应用于体积你得到的体积为 36 尺 ^{3}，这时边长是 36 的立方根，大约是 3.30 尺。

立方体悖论是一个很好的例子，它说明科学家或统计学家在对一个量得出了它的最大値或最小値之后，就进而假定实际値最可能取二者之间的中値，这时将会陷入困境，凯恩斯还给出很多这种悖论的实例。一旦学生们掌握了人们是怎样误用这个原理的，他们也许还乐意编出一些新的笑话来。

这个原理在概率论中可以合法地应用，不过仅当以客观情况是对称的这一点为依据，从而假定两种概率相等时才能奏效。例如，一个硬币在几何形状上是对称的，这就是说可以沿着硬币的边缘有一对称平面切过硬币。作用在其上的力是对称的—重力、摩擦力、大气压力等等都是对称的。它们对一面的作用力绝不会超过另—面。因此，我们就可以断定，国徽和字面二者出现的概率相等这一假定是合理的。这种对称性同样适用于有六面的立方体骰子和有 38 个条纹的轮盘赌。当我们不知是否有这种对称性，或许它根本就不存在时，就应用中立原理往往导致荒诞的结果。

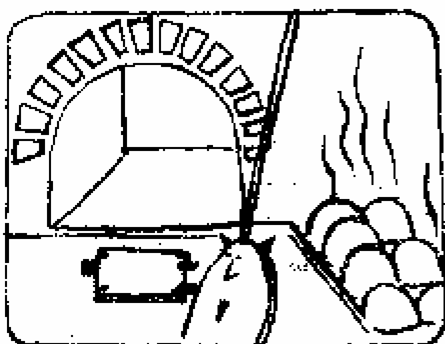
11 · 帕斯卡赌注



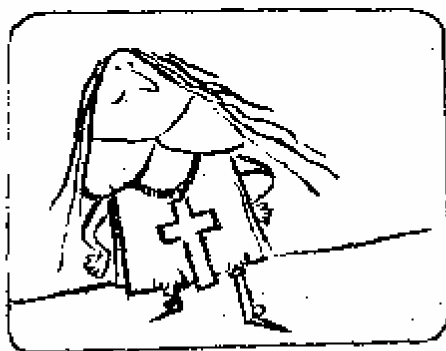
M：著名的十七世纪数学家布莱斯·帕斯卡把中立原理应用于基督徒的忠诚上。



帕斯卡：一个人无法决定他是接受还是拒绝教堂的教义。教义也许是真实的，也可能是骗人的。这有点象抛硬币，两种可能性均等。可报应是什么呢？



帕斯卡：假定这个人拒绝了教堂的教义。如果教义是骗人的，则他什么也没有损失。可是，如果教义是真实的，那他将会面临在地狱遭受无穷苦难的未来。



帕斯卡：假定这个人接受了教堂的宣传。如果教义是骗人的，他就什么也得不到。可是，如果教义是真实的，他将能进入天堂享受无穷的至福。



M：帕斯卡确信，对这一决策游戏的报应无限有利于把宝押在教义是真的这一态度之上。哲学家们自那以后一直在对帕斯卡的赌注进行争论。你的看法如何？

十七世纪的法国数学家和哲学家布莱斯·帕斯卡是概率论的奠基者之一。在第一图里所画出的是他提出的一个被称之为“帕斯卡三角”的著名的数字结构。帕斯卡不是这个三角的发明者（它可追溯到中世纪早期），但他是第一个对此作了彻底研究的人。这个图形的结构具有许多精美的组合性质，从而使它成为解答初等概率问题的一个有用工具（见哈诺尔德·雅可比的《数学——人类的魄力》关于帕斯卡三角一章）。

在哲学上，帕斯卡三角最富戏剧性的应用是帕斯卡《随感录》中第 233 个想法。帕斯卡认为，由于我们无法确定教堂的教义是真还是假，我们就应该把这两种情况当作具有同等的可能性。就像抛掷硬币的结果一样。然而如果我们接受教堂的说教，报答是无限有益；如果我们拒绝它，就会无限受报。因此，他主张接受是最上策。

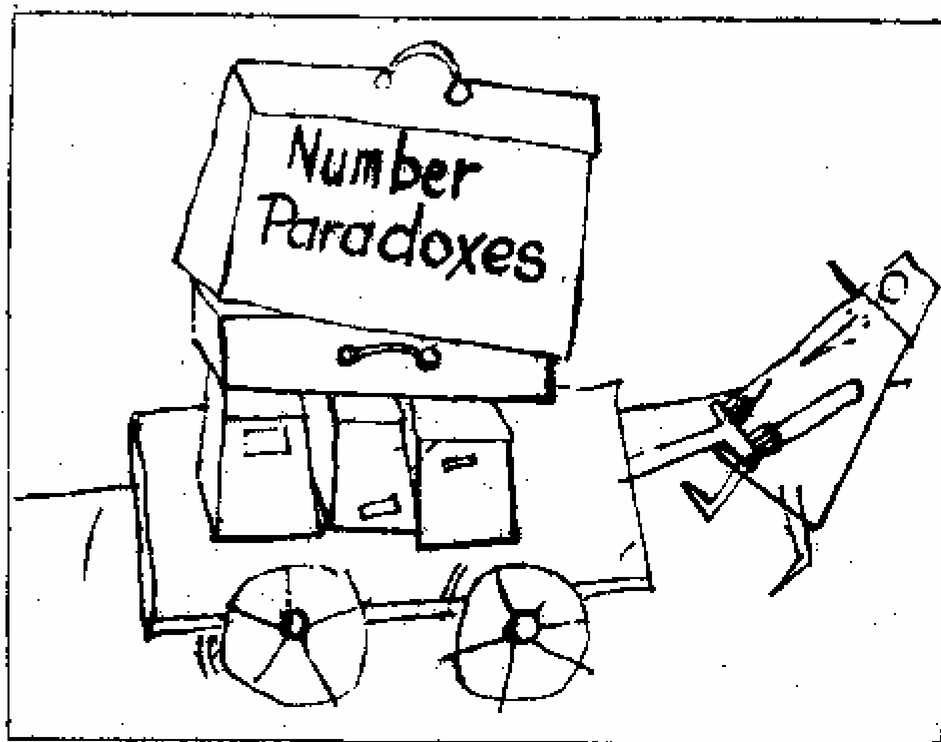
课堂讨论帕斯卡赌注很快就能引导学生深入到各种具有深刻挑战性的问题。例如：

1·中立原理是合法地应用于帕斯卡的论断之中吗？

2·对于法国哲学家丹尼斯·林德罗提出的这样一个异议你作何回答？世界上还有很多其他的影响很大的宗教，例如伊斯兰教，它们也提出接受该宗教是得到拯救的条件。帕斯卡赌注也适用于所有这些宗教吗？如果这样的话，一个人难道能成为每个宗教的信徒吗？

3·你对威尔斯的看法有何见解？我们并不知道世界在经历一场原子大战之后是否会保留下来。可是，你的生活和所作所为应该表现得好象你确信世界能够经历这场劫难而保存下来那样，这是因为（如威尔斯所说）“如果在末了，你的乐观看法不能证实，你也总是快乐的”。

第三章 关于数的悖论

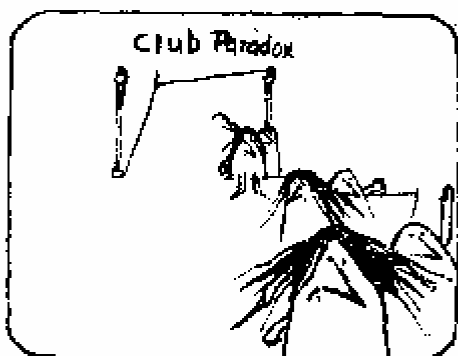


这里介绍的各种数的悖论会激发学生深入数论和其他与列出的悖论有关的数学分支。

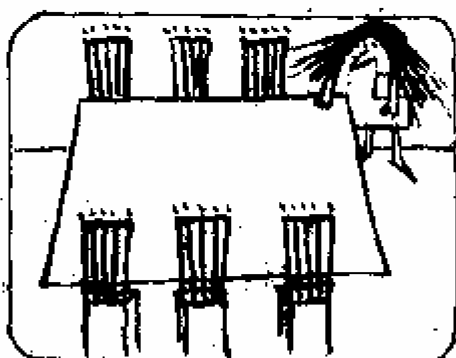
由于这些悖论看上去违反直觉和常识而使数学家们感到震惊和难堪，这一点强烈地影响了数学发展的历史。经典的事例有：首次发现无理数、虚数、复数、不遵循乘法交换律的数（四元数）、或不遵循乘法结合律的数（凯雷数），等等，直到乔治·康妥在十九世纪时揭示出一类超限数，大卫·希尔伯特把它称为超限数的“乐园”。

这里选取的悖论大部分是关于简单算术的和初等集合论的。对算术感到厌烦的学生可以受到鼓励去模仿书中例子编出一些新悖论来，他们在做这一尝试中会取得算术技巧。例如，“无所不在的 9”能指导做有限计算，“奇异的遗嘱”能指导丢番方程，“惊人的编码”使学生了解无理数的性质。很多悖论是把代数解加以推广的起步点。这一章结尾处有意稍微显露一点康妥乐园中超限数知识，这个超限数乐园有很多令人兴奋的研究正在进行。

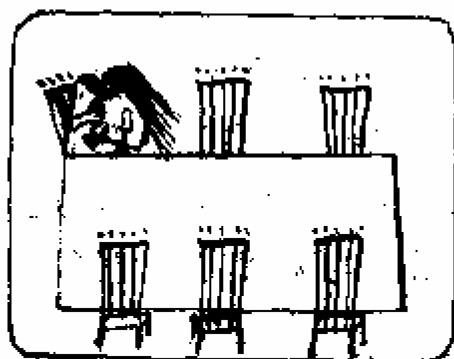
1·六个席位之谜



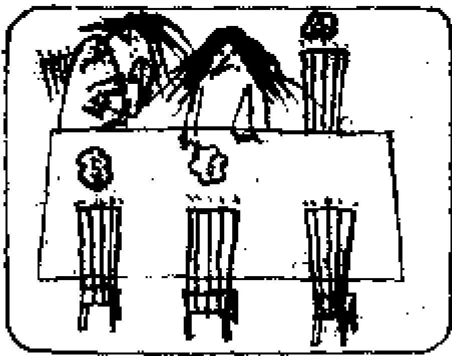
M：六个学生在一个大众唱片酒吧预订了席位，到最后一分钟时，第七个学生参加进来。



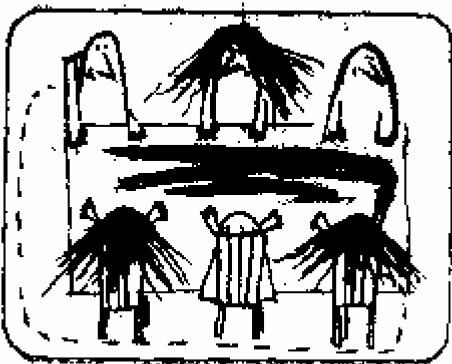
侍者：谢天谢地！这些小青年终于到了。我已经给他们安排了六个席位。哦，不！我看见有七个人。



侍者：不过也没有问题。我见让第一个学生坐下，让他的女朋友坐到他的腿上待一会儿。



侍者：现在第三个学生就坐到头两人的旁边，第四个学生又坐在她旁边。第五个做到抱着女友坐的那个小伙子对面，第六个坐在这位的旁边。这就安排好了六个人，还有一个空位！



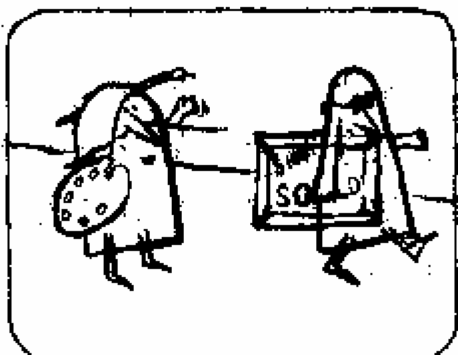
侍者：这下，我该做的就是叫第七个学生从她的男朋友腿上下来，绕到桌子对面，坐在那个空位子上！

M：那样没有什么问题吧？七个人坐六个席位，一人一个席位！

这是一个古老的悖论——一位旅店老板年安排 21 位旅客住进 20 个房间——的另一形式，学生们是不难指出其中谬误的。只要注意到那个暂时坐在男友身上的姑娘是第二个学生就解决了这一矛盾。当第六个学生坐下时，酒吧老板忘了这个姑娘是第二名，又把她当第七个学生来安排了。实际上第七个学生没有能坐到桌旁来，只不过是第二个学生从她的男友身上下来，绕过桌子，坐到第六个席位。

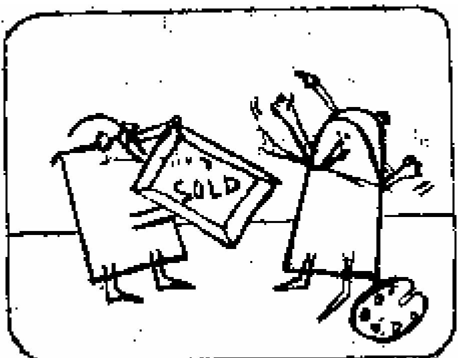
这个悖论显然违反了下面的定理；即 n 个元素的有限集能够，且只能与具有 n 个元素的其他集合一一对应。我们将在后面的“无穷旅馆”悖论中考虑无穷集时再回头讨论这一定理。 “六个席位之谜”是介绍有限集与无穷集之间区别的有趣方法。

2．赚了多少钱？

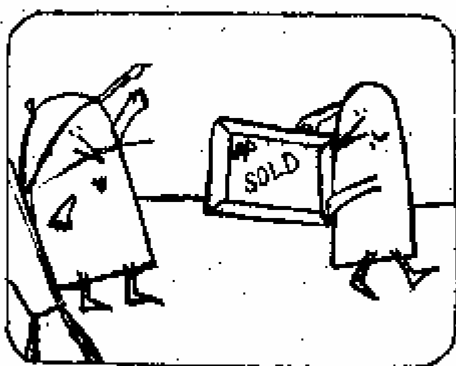


M：丹尼斯把他的油画卖给乔治，卖了 100 美元。

丹尼斯：乔治，你可捡着便宜了。十年以后，这幅画就会值这个价钱的十倍。

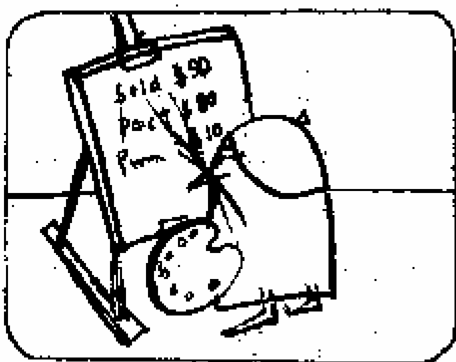


M：乔治把油画挂在家中，可是不久，他觉得不喜欢这幅画了。他又把画卖给丹尼斯，卖了 80 美元。



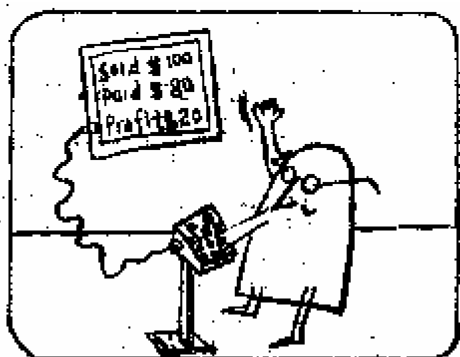
M：一周以后，丹尼斯将这张画以 90 美元卖给了格里。

丹尼斯：格里，你可是占了大便宜。十年以后，这幅画就要值这个价钱的五十倍了！



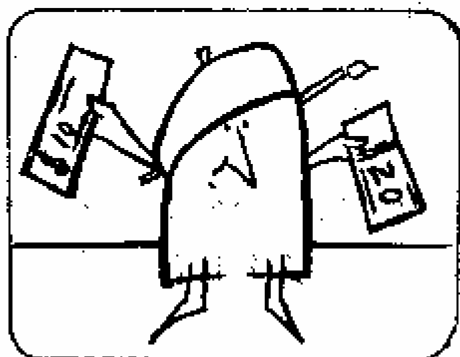
M：画家很得意。

丹尼斯：头一次我卖得 100 美元，那正好是我用掉的时间和材料的费用，所以那是对等的买卖。后来，我买它用了 80 元，卖掉又得到 90 元，所以我赚了十块钱。



M：乔治的算法可不一样。

乔治：画家把他的画卖给我，得到 100 美元，买回去又花了 80 元，显然赚了二十块钱。第二次卖多少，我们可以不管，因为 90 元是那张画的价值。



M：格里把两种算法都颠倒了。

格里：画家头一次卖画得 100 元，买回去花 80 元，所以赚了 20 元。从他买画花 80 元，卖画给我要了 90 元来看，他又赚了 10 块钱。所以，他总共赚了三十块钱。

M：到底他赚了多少钱？二十块？三十块？

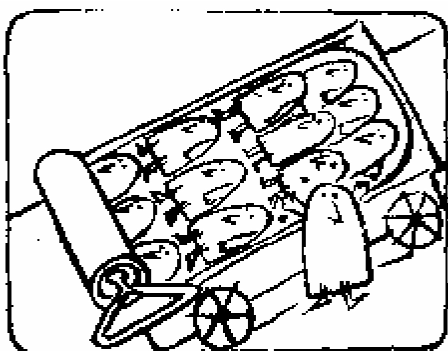
这个纠缠不清的小问题会引起热烈的课堂讨论。也许学生们要花一定的时间才能认识到这一问题中的困难在于它是没有“明确定义的”，因而每个答案都可说是同样正确的，或同样错误的。

不可能说出画家“实赚”多少，因为问题的陈述中没有说那幅画原来的“成本”是多少。我们且不管画家作画耗费时所付出的代价，而只假定说他作画使用的材料，如画架、画布和颜料等总共花费了 20 美元。经过三次倒卖之后，画家得了 110 元。如果我们把“实赚”定义为他的材料用费与他最后得到的钱数之差的话，那么他赚了 90 元。

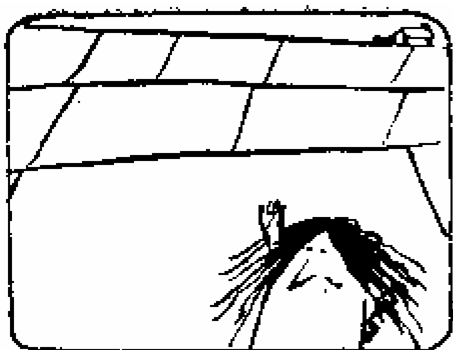
由于我们不知道材料的成本费是多少（我们只是假定了一个数值），故我们无法计算实际赚钱究竟是多少。这个问题看起来是一个算术问题，但实际上它是关于“实赚”的意思是什么的争论。这个悖论有点像一个古老的悖论：树林中有一棵树倒下来，要是没有任何人的耳朵听到这倒下的声音的话，那么到底是否发出了声音？答案可以是“有”，也可以是“无”，这取决于“声音”一词的意思是什么。

在几何学悖论中，对上面这两个悖论有两个另外的有趣例子，那基本上是对一个词的含意的争论。

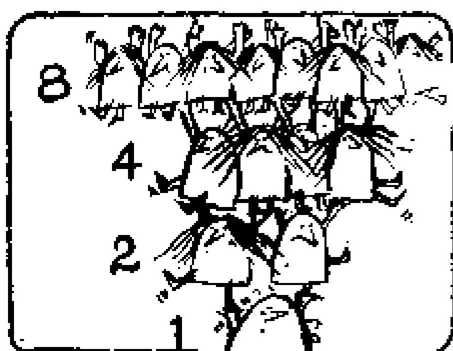
3·人口爆炸



M：近来，我们听到很多关于地球上人口增长多么快的议论了。

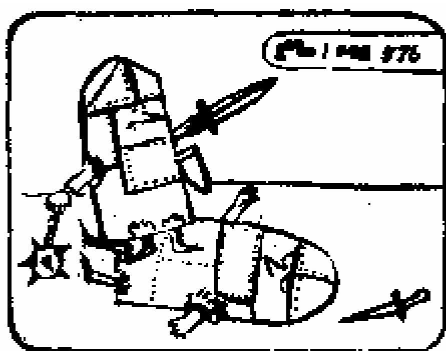


M：妇女反对控制生育同盟主席，宁尼夫人不同意这种说法，她认为世界上的人口正在减少，很快地，每个人就会有更多的空间，比他们所需要的还要多。



M：她的观点是——

宁尼夫人：每个人生来就有父母双亲。这父母二人中每一个又有一父一母。这就有四个祖父母辈的人。每个祖父或祖母又有父母二人，所以就有 8 个曾祖父母。你每往上数一辈，祖宗的数目就增加一倍。



M：如果你回溯 20 代到中世纪，你就会有1048576个祖宗！把这个应用到今天每个活着的人身上，那么中世纪的人口就会是现在人口的一百多万倍!宁尼夫人肯定不对，可是她的推理中那儿出了错？

要考虑这个问题最好是先问问，在这个悖论和“六个席位之谜”之间有什么联系没有。

如果下面两个假定成立的话，宁尼夫人的说法就是对的：

1·在各个活着的人的祖辈宗谱树上，每一位祖先只出现一次。

2·同一个人只出现在一个祖辈宗谱树上，不能多于一次。

在所有各种情形中这两个假设没有一个是正确的。如果一对夫妇有五个孩子，这五个孩子又每人有五个孩子，那么，原来那对夫妇就会是 25 个独立的祖辈宗谱树上的祖父母。再者，如果你在任意一个宗谱树上回溯很多代，就会有某些远亲联姻的夫妇。

宁尼夫人论点的谬误就在于，它既没有考虑到一棵宗谱树上远亲联姻的夫妇，又没考虑到构成每个活人的宗谱树上的人群的大量"交易"。在"六个席位之谜"中只有一个人算了两次，可是在宁尼夫人关于人口回溯内爆中就有成千上万人计算了成千上万次！

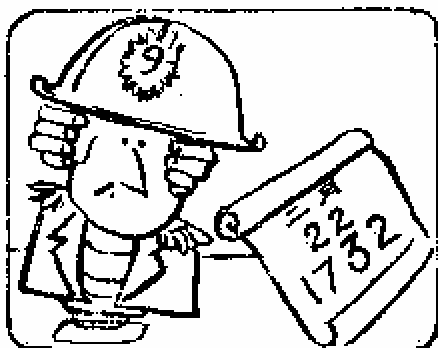
一个班级的学生也许会对加倍数列的各项增加之快感到吃惊。如果有某人同意，今天给另一人一元，明天两元，后天 4 元，如此下去。很难相信在第 20 天他就得给那个人一百多万元！这一惊人的结果往往用来介绍几何级数（见哈罗尔德·雅可比的《数学—人类的魄力》第二节）。

在加倍数列中有没有什么简便方法来计算头 20 项的和？有！办法是末项增加一倍再减 1。第 20 项是 1048576，故头 20 项的总和为：

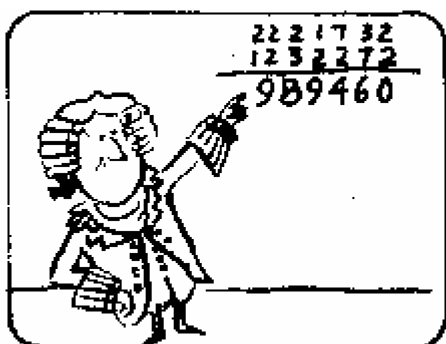
2*1048576-1=2097151

这个方法可用来求加倍数列中任意前若干项的部分和。有些学生应当会证明这一结果。

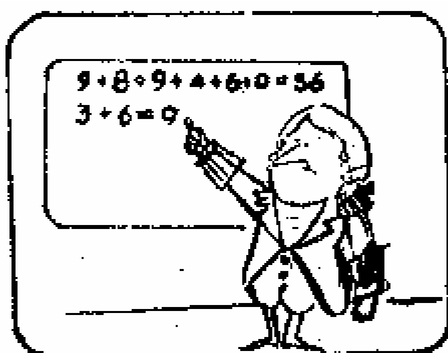
4·无所不在的 9



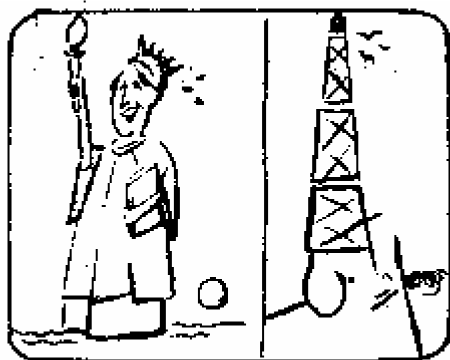
M：数 9 是具有很多神秘性质的数。你知道吗，9 隐藏在每个著名人物的生日中？



M：请看华盛顿的生日。他出生在 1732 年 2 月 22 日。把这些数字按美国习惯写成一个数 2221732，现在，把这个数中的数字重新排列，就可以构成任意一个不同的数。用较大的数减去较小的数可得一个差数。



M：把差数的各个数字加起来，在这个实例中得和 36。3 加 6 得 9！



M：如果你对德·高尔、约翰·肯尼迪或者任何一个著名的男人或女人的生日作上述计算，你最后都可得到 9。是不是著名人物的生日和9有什么神秘的关系？

一旦弄懂了上面这个悖论说明的计算程序，就可在班级里试试让每个学生把自己的生日作这一计算。结果，每个人最后都得到 9。

如果把一个大数的各位数字相加得到一个和，再把这个和的各位数字相加又

得一个和，再继续作数字和，直到最后的数字和是个位数为止，这最后的数称为最初那个数的“数字根”。这个数字根等于原数除以 9 的余数，因此这个计算过程常常称为“合九法”。

求一个数的数字根最快的方法是在加原数的数字时把 9 舍去。例如，最初两个数字是 6 和 8，二者相加成 14，再将 1 加 4，结果是 5。换言之，舍去 9 以后的数字和若多于一位数则把两个数字再加起来，计算这个和。最后的数就是要求的数字根。可说数字根等价于原数对 9 的模，简称模 9。由于 9 除以 9 余零，所以在模 9 算法中，9 和 0 是等价的。

在发明计算机之前，会计员常常用模 9 算法来检查很大数目的和、差、积和商。譬如，假若我们用 A 减 B 得到 C，这个结果可以作下面检查：把 A 的数字根减去 B 的数字根，看看差是否对得上 C 的数字权。如果原来算的差是对的，那么数字根的差也对得上。这并不能证明原来的计算正确，可是如果数字根的差不等，则会计员就知道他算错了。如果数字根能对得上，则他计算正确的可能性是 8/9。这种数字根检验方法可同样应用于数字的加、乘和除上。

现在我们就可以弄懂上述生日算法的奥妙在哪里了。假定一个数 N 由很多个数字组成。我们把 N 的数字打乱就得到一个新的数 N’。显然 N 和 N’有着同样的数字根。因此，如果我们把二者相减就会得 0，这和 9 是一回事（在模 9 算法中）。这个数，0 或者 9，必然是 N 和 N’之差的数字根。简言之，取任意一个数，把它的数字打乱重排得另一数，将二者相减，所得的差的数字根就是 0 或 9。

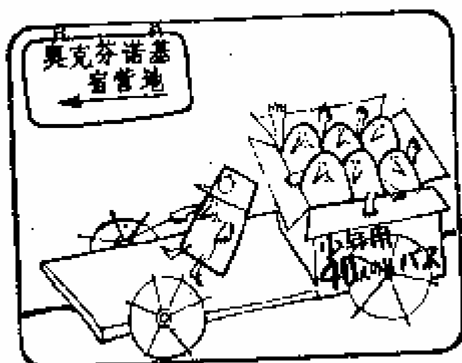
结果为 0 只是在 N 和 N’相等时。因此，应当提醒学生，在他们用自己生日进行计算时，要保证重排的数可以得到一个差数。只要两个数不等，其差的数字根就是 9。

用这个无所不在的 9 可以玩出很多数字魔术来。例如，一个学生在老师背转身去时写下一个数，所以老师看不见学生写的是什么。然后学生把那个数的数字打乱排成另一个数，计算这个数与原来那个数的差（大数减小数）。然后老师就让学生把差数中一个非零的数字划掉。这时，学生把余下的数字按任意顺序高声读出。老师仍然背转着身子，却能说出划掉的数字是几。

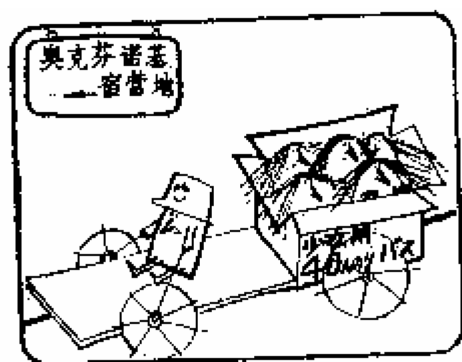
这个魔术的技巧很明显。那两个数之差应该有数字根 9。当学生划掉一个数字后，并高声读出其他数字时，老师只要去掉 9 把其他数字心算加出来。学生念完时，老师用 9 减去最后的数字，结果就是学生划掉的那个数字（如果最后算得 9，学生划掉的就是 9）。

上述魔术和生日之谜将大大激发学生学习模算系统的兴趣。

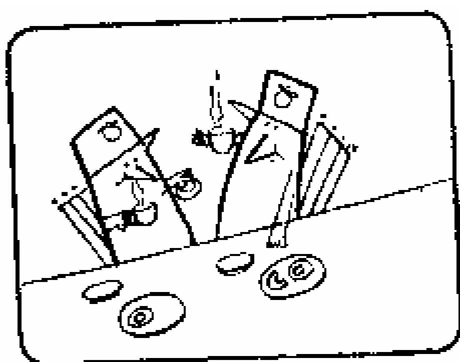
5 · 无可奈何的汽车司机



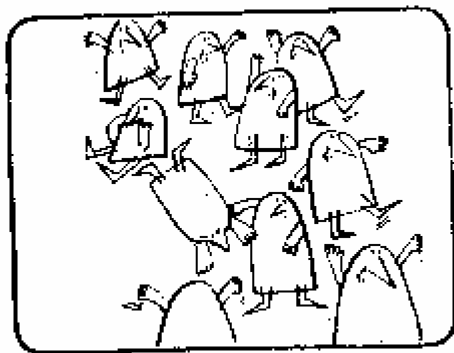
M：这辆汽车已坐进 40 个小伙子，他们很快就要上路去宿营地了。



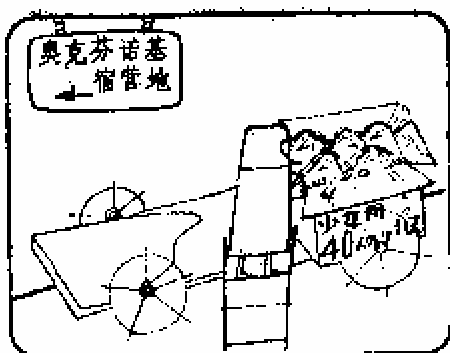
M：而为一辆汽车坐着 40 个姑娘。她们正要去同一地点。



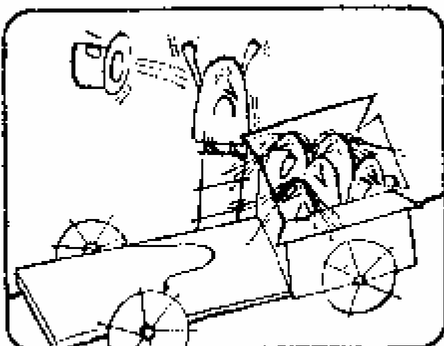
M：在出发前，汽车司机要喝点咖啡。



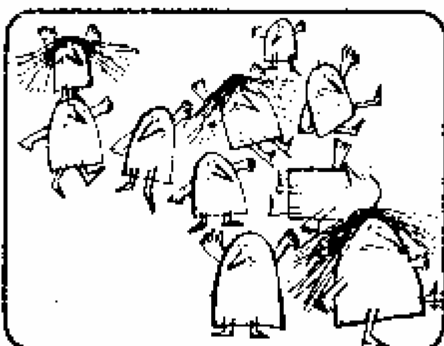
M：这时有十个小伙子偷偷地从他们的汽车中出来，溜进了姑娘们的汽车。



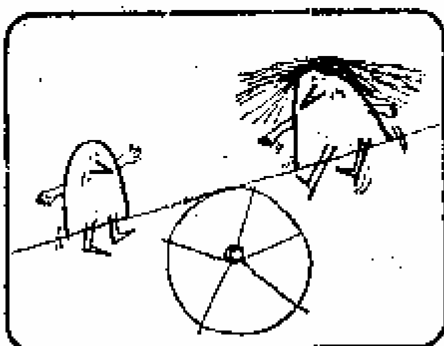
M：当姑娘们的司机回来时，他发觉乘客太多了。



司机：好了，请大家不要开玩笑、胡闹！这辆汽车坐 40 个人，所以你们最好下去 10 个人，快点！

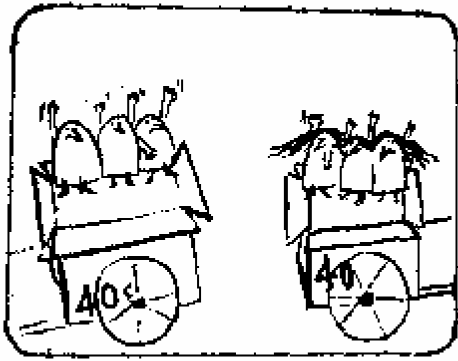


M：下来了不知性别的十个人。他们全上了小伙子的汽车、坐上了空座。一会儿，这两辆汽车各载着 40 个露营者便上路了。

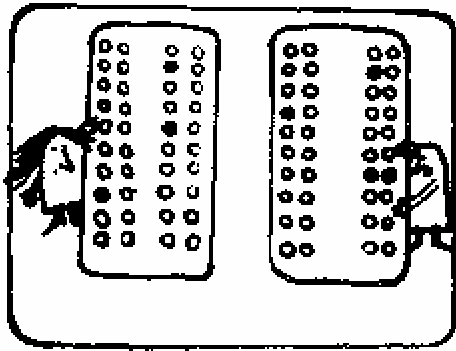


M：过了一会儿，姑娘们那辆车的司机想——

司机：嗬……，我确信有几个小伙子在这辆车上，还有些姑娘在小伙子的车上。我想知道，哪辆车上的异性乘客多？



M：尽管有点难以相信，但事实是，不管回到小伙子车上的十名乘客中男的女的各多少，这两辆汽车上异性乘客的比例都一样。



M：为什么？假定姑娘们的车上有 4 个小伙子，这就使小伙子的车上空出 4 个座位。这 4 个空位必定由 4 个姑娘坐着。其他数目，道理一样。

这个悖论很容易用一副扑克牌来证实。首先把这副牌分成 26 张红牌，26 张黑牌。让一个学生从两叠牌中的一叠拿出一小叠来。我们假定这个学生从红牌中取出 13 张把它放到黑牌上面。然后这个学生把折叠牌洗过。现在告诉学生从刚洗过的这叠牌中拿出 13 张（可从这叠牌中任何一个地方随便抽取），再把它放到那叠红牌上。最后把这样凑出的半副牌也洗一下。

当学生们把这两个半副牌打开检查时，就会发觉黑牌中混入的红牌数目和红牌中混入的黑牌数目一样多。这个把戏的证明完全和两个汽车的姑娘和小伙子的人数一样。

根据这个原理可以玩出很多扑克把戏。这里介绍一个巧妙应用这一原理的把戏。把一副牌严格分成两叠，使一叠翻成面朝上，再把两叠牌洗到一起。把这样混合起来的一副牌出示给学生们看，不告诉他们正好有 26 张牌翻开面朝上。可以让一个学生好好洗匀这副牌。你伸出手来，叫这个学生拿出 26 张牌放到你手中。

你说："要是我这半副牌中翻开的牌数和你那半副牌翻开的一样多，那不是很奇妙的巧合吗？"

叫这个学生把他（或她）手中的牌摊放在桌面上。这时你暗中翻转你手中的牌，再把牌摊放在学生那些牌的旁边。数数各叠牌面朝上的数目，两个数目相同！

你看出这个扑克把戏是怎么搞成的吗？如果你不把你手中的牌翻转，学生那半副牌中，翻开来的牌数就等于你手中面朝下的牌数。在你将牌翻转过来时，你手中面朝下的牌就变成了翻开来的牌了，这使得它正好和另外半副牌中翻开的一一对应。

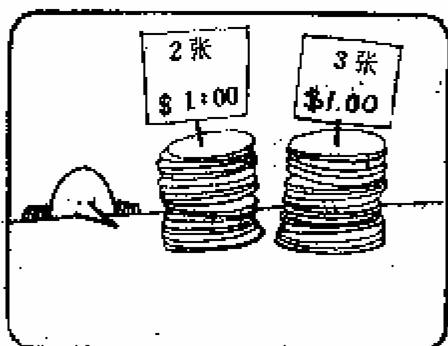
这时，我们可以考虑一个古老的智力问题。一杯水放在一杯酒的旁边。水和酒的量相等。从盛酒的杯子中取出一滴来放入那杯水中。把这杯水搅匀，然后从这种混合液体中取出一滴来（要严格与滴入的酒等量），放回酒中去。现在是水中的酒多，还是酒中的水多？

用心的学生立即就能察觉这是汽车悖论和扑克悖论的另一种实例。两种混合

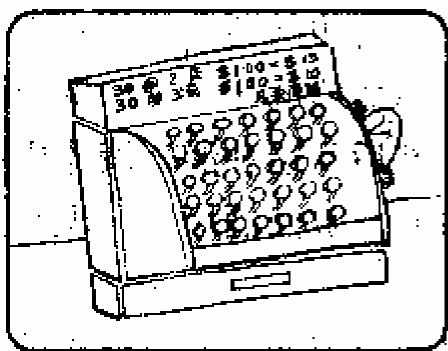
液体情况相同。即使两个杯子中的液体量不相等，混合液也不一定搅匀，答案仍然不变，甚至我们还可以把两杯液体滴来滴去，不一定要来回滴数一样。唯一的条件就是，必须使最后杯中所盛液体的量与它开始时一样多。这样酒杯中就失去一定量的酒。这失去酒的位置就被严格等量的水充满！对这一智力问题的证明完全类似于两辆汽车中姑娘和小伙子的人数或两半副牌中红牌和黑牌的数目的证明。

这个酒和水的例子证明了，对于一个可以用冗长乏味的代数方法证明的问题可以用浅显的方法顺利地获得一个简单的逻辑的证明，这是十分令人惊叹的。如上面举出的例子，只要有正确的观点就能看得出来。

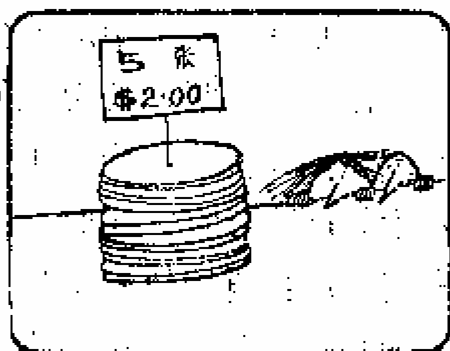
6·一块钱哪里去了？



M：一个唱片商店里。卖 30 张老式硬唱片、一块钱卖两张，另外 30 张唱片是一块钱卖 3 张。那天，这 60 张唱片全卖完了。

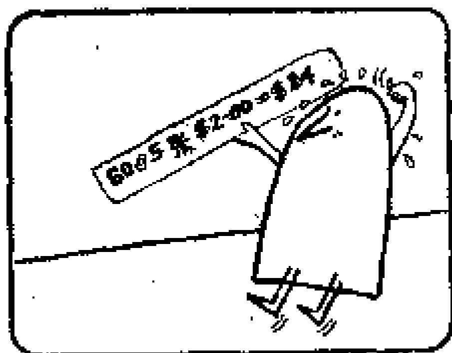


M∶30 张一块钱两张的唱片收入 15 元。30 张一块钱 3 张的唱片收入 10 众，总共是 25 元。

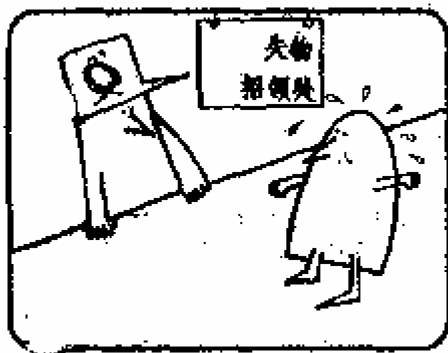


M：第二天商店老板又拿出 60 张唱片放到柜台上。

老板；何必要自找麻烦来分唱片？如果 30 张唱片是一块钱卖两张，30 张是一块钱卖 3 张，何不把 60 张唱片放在一起，按两块钱 5 张来卖？这是一样的。



M：商店关门时，60 张唱片全按两块钱 3 张卖出去了。可是，商店老板点钱时发现只卖得 24 元，不是 25 元，这使他很吃惊。



M：你认为这一块钱到哪里去了？是不是有个伙计偷了？是不是给顾客找错了钱。

这条悖论是建立等式和不等式性质的极好例子。正如上面的故事所表明的，那个老板觉得把两种唱片放在一起，每 5 张卖两块钱，和分开来一种卖两张一块钱，一种卖 3 张一块钱是“同样的”，这就搞错了。没有任何道理能说明两种卖法应该收入同样的钱数。上面的例子中两者之间的差很小，以致于看上去好像那一块钱是不留意造成的，或者是遗失了。

如果考虑一个同样的问题，但价格稍为不同些，大家就能更清楚地看出问题了。假定贵一些的唱片卖两块钱 3 张，或者说是每张唱片的价格是 2/3 元。较便宜的唱片卖 1 块钱两张，或者说每张 l/2 元。老板把这两种唱片混合，卖 1 块钱 5 张。假设每种有 30 张，如前面一样，分开来卖，得到 35 元，可是合起来卖 60 张共得 66 元。这样老板就多得了 1 元，而不是少了 1 元！

这时，我们就需要对此悖论作一下代数分析了。我们假设价格较高的唱片是每张卖 b/a 元，价格较低的唱片每张卖 d/c 元。两个分数都要化简为最简分数。例如上面唱片中的例子，贵的唱片是一块钱两张，即每张 1/2 元；便宜的唱片是一块钱 3 张，即每张 1/3 元，故 a=2，c=3，b=d=1。

假若所有唱片都各以两种不同的价格卖，则一张唱片的平均价格是 b/a 和 d/c 之和的一半。如果两种唱片合起来，按一个价格卖，那么。a+c 张唱片就卖 b+d 元钱，一张唱片的平均价格就是 $\frac{b+d}{a+c}$ 。显然，两套唱片合起来要收入同样多的钱数就必须是

$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{d}{c}}{2}=\frac{b+d}{a+c}$$

令人吃惊的是，这个等式只有在a=c时成立，而与b和d的值无关。如a>c，则两套唱片合起来交可得的钱多一些（自然起在的条件下，如我们这个说明中的例子，这里a=3，c=2)。如果a<c，则合起来卖就要赔钱（如上面唱片所举例子）[*]。

这个例子告诉我们，当看到不同种类的货物联合销售时，要判断我们是否真的买到了便宜货并不是一件轻而易举的事。

---

[*] 为比较两种卖法的差额，可计算如下：

由于，所以 bc-ad>0。

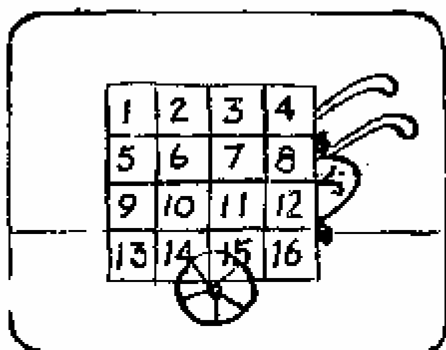
若 a=c，则二者之差为 0，

若 a>c，则二者之差为正，即单卖赚钱少，

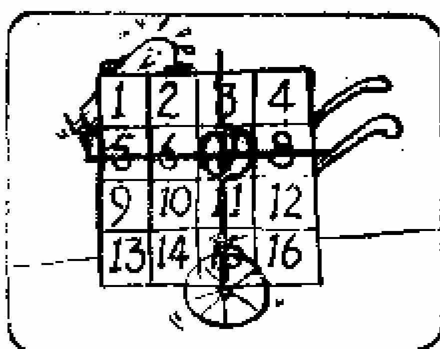
若 a<c，则二者之差为负，即单卖赚钱多。

——译注

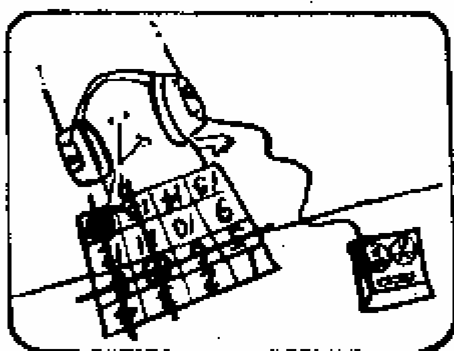
7·奇妙的方阵



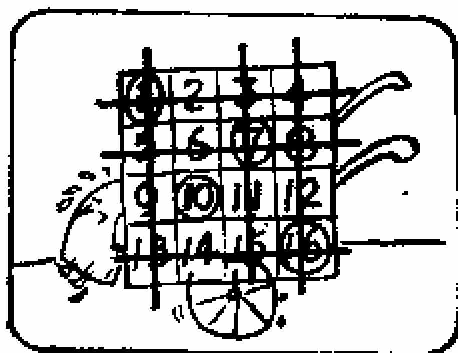
M：把这个 4 行 4 列的方阵画在一张纸上，将 1 到 16 等数字填入格中。我现在举一个著名例子，证明人的精神的威力，这定会使你吃惊！我能够把握你在这个方阵中选择的 4 个数。



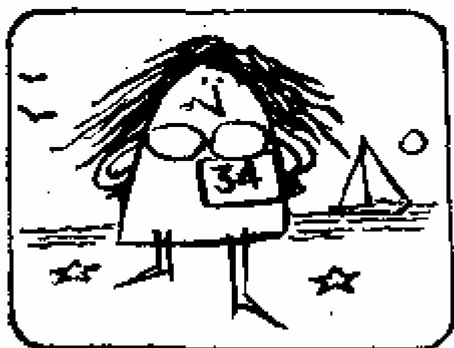
M：在这个方阵中任意选一个数并画上圈。这个画片中圈的是 7，可是你可以圈你自己选出的数。现在将圈出的数所在的那—竖行（称为列）划一条竖直线，再将这个数所在的横行（称为行）划一横线。



M：在没有划线的数中，选一个数并画上圈。又按上面的方法将这个数所在的行和列划线。再选第三个没有划线的数，将这个数所在行和列划线。最后把仅余下来的一个数画圈。



M：如果你按上法进行，则你的方阵就有点像这张画中的样子。现在，把你选出的画圈的 4 个数加起来。



M：你做完了吗？我现在告诉你们每个人你们加得的总数。它…是…34！对不对？我怎么知道的？我真的能左右你的选择吗？

为什么这个方阵会使得我们选出的四个数加起来总是得 34？秘诀巧妙而简单。在 4*4 的方阵的第一行的上面顺次写 4 个数 1、2、3、4。在第一列的左边写 4 个数 0、4、8、12。

	1	2	3	4
0				
4				
8				
12				

这 8 个数称为魔法方阵的“生成元”。方阵中每一格可以填上由这一格所在列上方的生成元与所在行左边的生成元相加得到的数。按这个方法将方阵中所有格子填满之后，我们的方阵就按从 1 到 16 的顺序填满了。

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

现在我们就可以看一看按前面讲的步骤圈出 4 个数时有什么特点。显然，上面步骤保证圈出的 4 个数不会在同一行或同一列。每一个圈出的数都是两个生成元的和，由于它们各在不同的行和列，故 4 个数的生成元各不相同，因此这 4 个数的和就等于全部 8 个生成元的和。这 8 个生成元相加等于 34，所以圈出的 4 个数的和总是 34。

当学生们明白了方阵的窍门后，他们就能编出各种不同大小的方阵来了。比如，我们考虑一个 6 阶的方阵，它有 12 个生成元。注意，在这个例子中，选取的生成元使得方阵内数字看起来好像是完全随意的。这里面暗含看这个方阵数字的结构基础，从而使之更富神秘色彩。

	4	1	5	2	0	3
1	5	2	6	3	1	4
5	9	6	10	7	5	8
2	6	3	7	4	2	5
4	8	5	9	6	4	7
0	4	1	5	2	0	3
3	7	4	8	5	3	6

所有生成元的和是 30。如果照前面画片中说明的步骤来选择数字的话，最后选出的所有数之和应为 30。自然，那个有肯定结果的数字（或和数）的大小可以由我们任意挑。

如果构成一个 10 行 10 列的方阵，使选出的和为 100，或任何其他有趣的数，例如当年的年份或某人的出生年分等，这会激发起热烈的气氛。

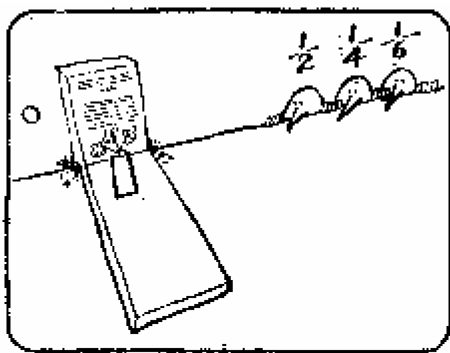
魔法方阵可否在格中填负数？当然可以！事实上，生成元可以是任意实数：正数或负数、有理数或无理数。

魔法矩阵可否采用乘法，就是选出的数彼此相乘得一定数？可以。这可以引起学生们探讨另一条途径。基本结构完全相同。这时方阵格中的数是一组生成元的乘积。我们也许还希望看看，如果格中填入了一组复杂的数，会产生什么结果。关于魔法方阵的更多的内容可以在《科学美国人》杂志出的《数学之谜和数学游戏》一书第二章中找到。

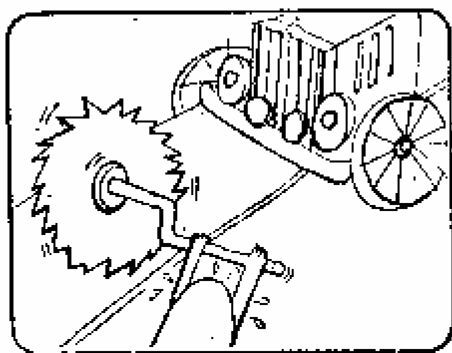
8·奇怪的遗嘱



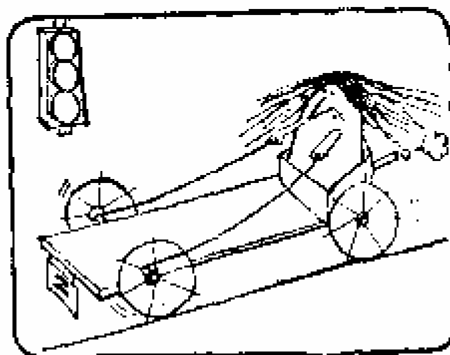
M：一个富有的律师拥有 11 辆古董汽车，每辆值 5000 美元。



M：律师死时留下了一个奇怪的遗嘱。他说他的 11 辆古董汽车分给他的三个儿子。把其中的一半分给长子，1/4 分给次子，1/6 分给小儿子。

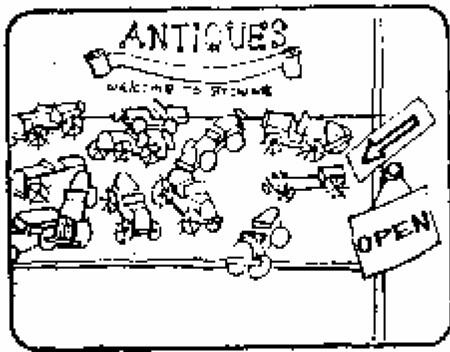


M：大家都感到迷惑不解。11 辆汽车怎么能分成相等的两份？或分成 4 份？6 份？



M：他的儿子们正在为怎么个分法争论不休时，林小姐——一位著名的数学家驾着她的新式赛车来了。

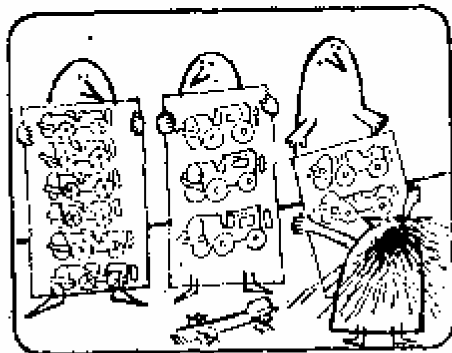
林小姐：好啊，小伙子们。你们好像碰到了难题。我能帮点忙吗？



M：小伙子们向她诉说了原委，林小姐便把她的赛车停在 11 辆古董汽车旁边，下了车。

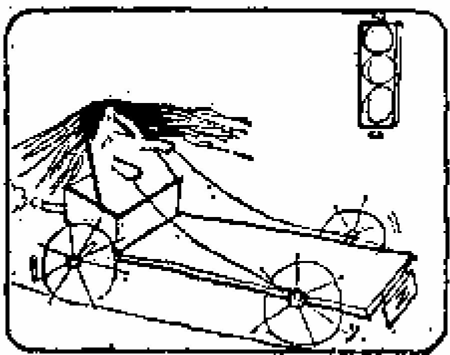
林小姐：小伙子们，说说看，这里有几辆车？

M：那些小伙子一数，有 12 辆。



M：这时，林小姐便履行遗嘱。她把这些汽车的一半，6 辆给了老大。老二得到 12 辆的 1/4，即 3 辆。小儿子得到 12 辆的 1/6，即 2 辆。

林小姐：6 加 3 加 2 正好是 11。所以，还余下 1 辆，这正是我的车。



M：林小姐跳上她的赛车启程了。

林小姐：很乐意效劳，小伙子们！我会把账单寄给你们的！

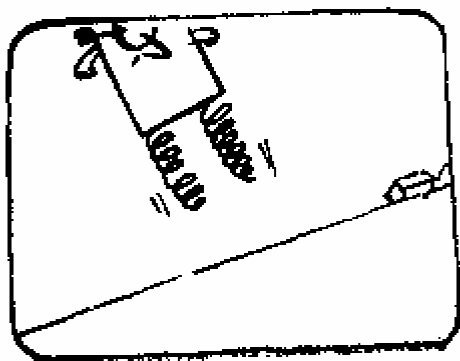
这是一个古老的阿拉伯悖论，这里是把那个悖论中的马换成汽车而变成现代化的说法了。学生们一定高兴试着变变遗嘱的内容，如改变汽车的数目，和分配它们的分数，条件是借一辆车就可执行遗嘱，最后还要余下一辆车退给借车人。

例如，可能是 17 辆车，遗嘱说把它们分为 1/2，1/3 和 1/9。如果有 n 辆车，三个分数是 1/a，1/b 和 1/c，则只有在

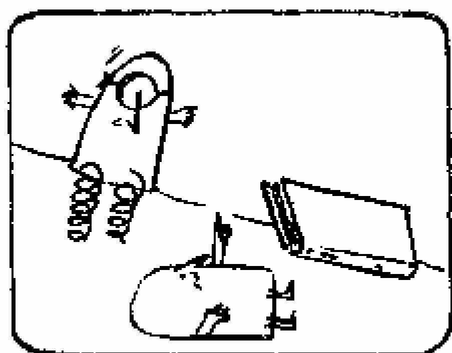
有一个正整数解时，上述悖论才起作用。可见让学生们再做复杂一些的问题，增加继承人的人数，同时增加为执行遗嘱而借的车辆的数目。

自然，这个悖论的解答在于下面事实：原来的遗嘱提出的分配比数相加不为 1。如果用拆散汽车的方法来执行遗嘱的话，就会余下 11/12 辆汽车（即一辆汽车的 11/12）。林小姐的办法是把这 11/12 辆汽车分给了儿子们。老大得到比他原来应得的数量多一辆汽车的 6/12，老二多得了 3/12 辆，小儿子多得了 2/12 辆。这三部分加起来是 11/12，这样一来每个儿子所得的汽车就是整数，所以就不用拆散汽车来分了。

9 · 惊人的编码



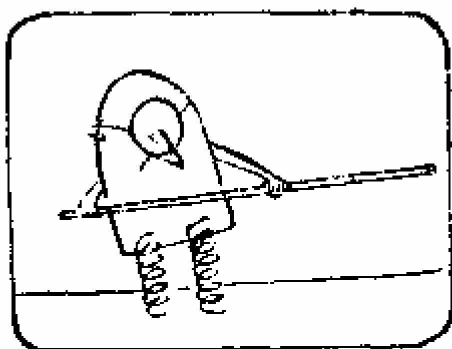
M：基塔先生是来自另外一个时空结构中的星系——螺旋系的科学家。一天，基塔博士来到地球收集有关人类的资料。



M：接待基塔博士的是一位美国科学家赫尔曼。

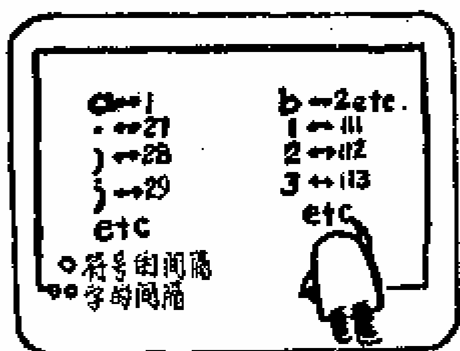
赫尔曼：你何不带一套大英百科全书回去？这会书最全面地汇总了我们的所有知识。

基塔：这是一个好主意，赫尔曼。可惜，我不能带走那样重的东西。

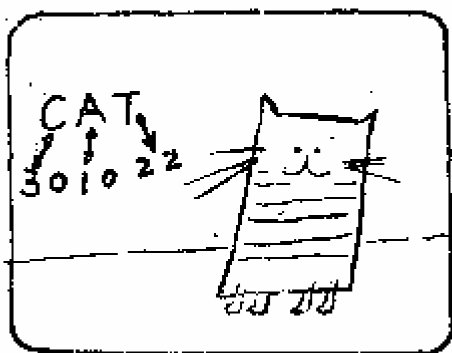


基塔：不过，我可以把整套大英百科全书编码列这根金属棒上。在棒上有个标记就可以做到这一点。

赫尔曼：你不是开玩笑吧？一个小小的记号怎么能携带这么多信息？

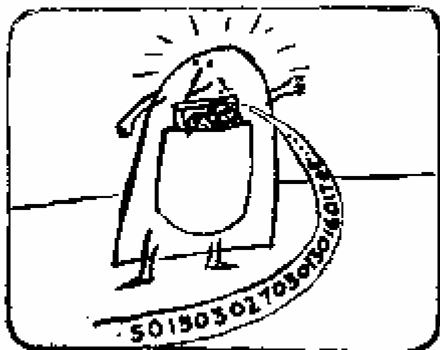


基塔：很简单，我亲爱的赫尔曼。各个符号——每个字母、数字、标点符号——都配上一不同的数。零用来隔开符号。两个零表示词之间的间隔。

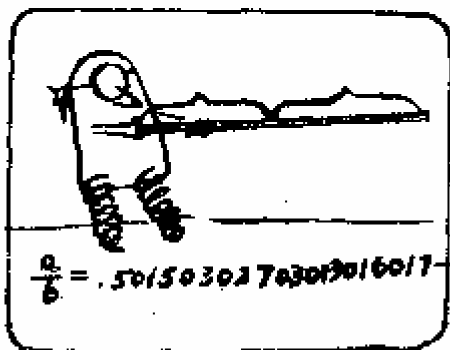


赫尔曼：我不懂。你怎么编码 cat？

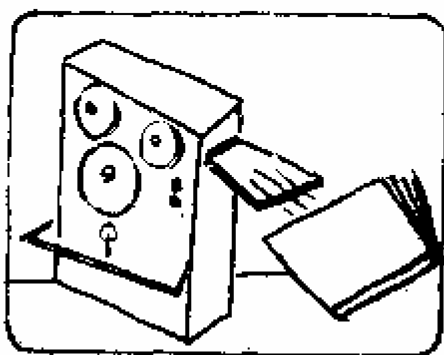
基塔：这很简单。我马上给你看我们使用的代码。cat 一词编为 3-0-1-0-22。



M：基塔先生用他那高级袖珍计算机快速扫描百科全书，把它的全部内容转变为庞大的数字。在数的前面加一个小数点，就使它变成了一个十进制的分数。



M：基塔博士在他的金属棒上标上一点，这一点把这根棒严格分成其长为 a 和 b 的两段，并使得分数 a/b 正好等于他那代码的十进制分数值。



基塔：当我回到我自己的星球上时，我们的计算机可以严格测出 a 和 b 的值，然后算出分数“a/b”。这个十进制分数就可以被译码、这时计算机就可为我们把你们的百科全书印出来！

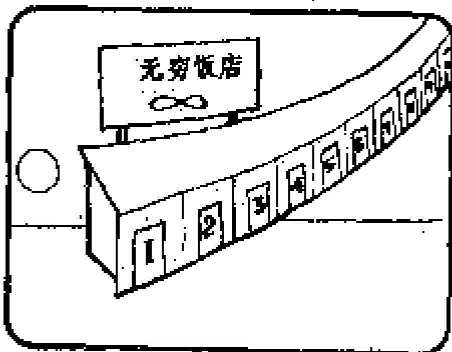
还不熟悉密码的学生们也许乐意按照这里所用的数字代码来给一个简短讯息编码和译码。编码表明了一一对应的重要性，以及如何把一种结构标记为另一种同物的结构。这种编码实际上是用在一种高级的证明理论中。库尔特·哥德尔作出了一个著名的证明：一个复杂到足以包含整数的演绎系统有一些定理是不可能在该系统之内证明其是否正确的。哥德尔的证明依据的就是将一个演绎系统中的每一个定理都交换为一个特定的、很大的整数。

把一整套百科全书用一个点标在棒上只是理论上成立，实际上是行不通的。

困难在于在棒上标上这个点所需的精度是不可能达到的。而且标出的点必须比一个电子小很多，两段长度的测量也必须同样精确。如果我们假定两个长度确实能够精确地测量，从而得到基塔博士的那个分数，自然用他的办法就可以成功。

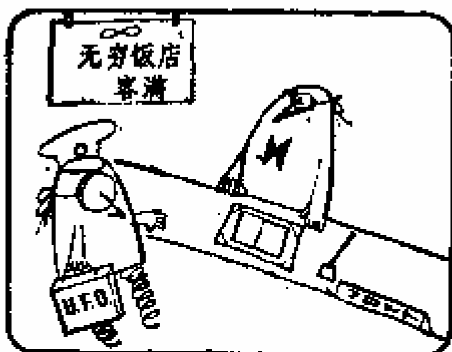
数学家确信π的十进制展开式是个无穷无规律数字的序列。如果确实是这样，那就意味着，任何一个有限的数字序列都一定会出现在展开式的某一段。换句话说，在π的展开式的某一段就是基塔博士编的大英百科全书的代码序列，或者就是任何其他业已出版的，或可能要出版别的著作的代码！

10 · 无穷饭店

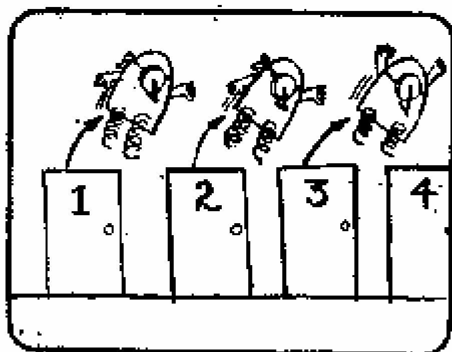


M：在基塔离开之前，他讲了一个稀奇的故事。

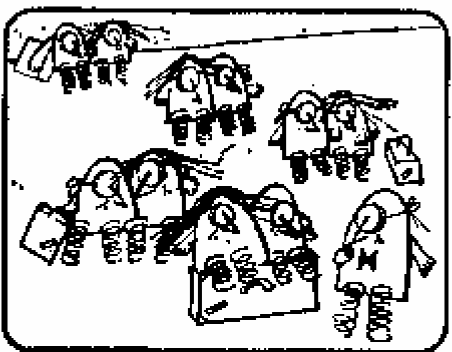
基塔："无穷饭店"是我们银河系中心的一家巨大的旅馆。它拥有无穷多个房间，这些房间通过黑洞伸展到更高级的时空领域。房间号从 1 开始，无限制地排下去。



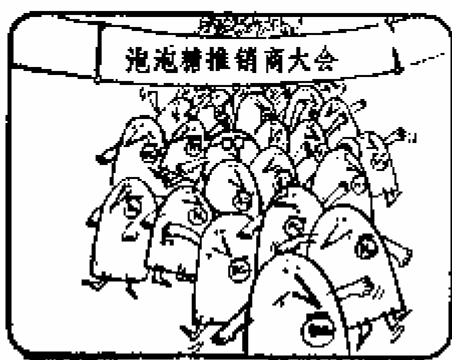
基塔：一天，这个旅店的客房全住进了客人，这时候来了一位飞碟（不明飞行物）的驾驶员，他正要去别的星系。



基塔：尽管已经没有空房间了，可是旅店老板仍然给驾驶员找到了一个房间。他不过是把原来住在各个房间里的房客都一一移到高一号的房间。于是左边第 1 号房间就空出来给该驾驶员住。

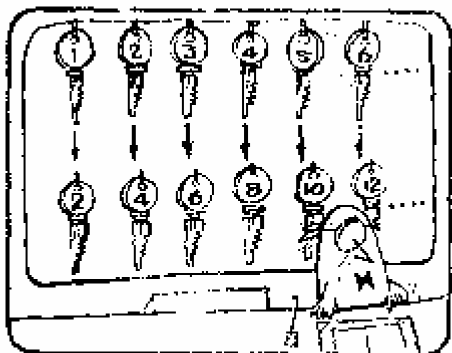


基塔：第二天又来了五对夫妇渡蜜月。无穷饭店能不能接待他们？可以，老板只不过把每个客人都一一移到高 5 号的房间中去，空出的 1 到 5 号房就给这 5 对夫妇。

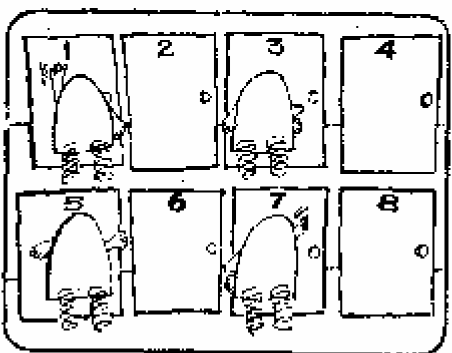


基塔：周末，又有无穷多个泡泡糖推销员来到这家旅馆开会。

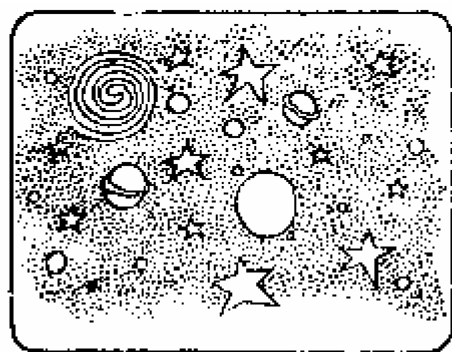
赫尔曼：我能够理解无穷饭店可以怎样接待有限数量的新到者，可是它怎么能够再给无穷多旅客找到新房间呢？



基塔：很容易，我亲爱的赫尔曼。老板只要把每个房间里的客人移到原来号码两倍的房间中去就行了。



赫尔曼：对了！这下每个房间里的人都住到双号房中，余下的所有单号房间有无穷多个，它们空出来给泡泡糖商人住！



M：关于无穷大还有很多悖论。计数用的数是无穷大等级中最低一级的无穷数。在整个宇宙中的点数是第二级无穷大数，第三级无穷大数比这要多得多！



M：德国数学家乔治·康妥发现了无穷大的这种等级，他把这种新型的奇异等级称为阿列夫零、阿列夫 1、阿列夫 2 等等。关于阿列夫数有很多深刻的神秘性，解决它们是现代数学中最激动人心的挑战之一。

如我们所知，任何一个有限集都不能与它的一个真子集建立一一对应的关系。对于无穷集这一点就不成立了。看上去这样就违反了整体大于局部这一古老法则。确实，一个无穷集可以定义为能够与它的一个真子集一一对应的集。

无穷饭店的老板首先表明了由一切计数用的数所组成的集合（这是乔治·康妥称为阿列夫零的集合）可以与它的某一个真子集一一对应，并余下一个元素，或者五个元素。显然，这一程序可以变化，使得从一个阿列夫零集中减去它的一个子集，这个子集也是阿列夫零集，从其余下的数中就会得到所要的任何有限个数量的元素。

还有一个办法可以使这一减法形象化，想象有两根无限长的测量棒并排放在桌子上，把两棍棒的零端对齐放在桌子中心。两根棒都刻了线，按厘米计数。两根棒在右端延伸到无穷远，所有数都一一对应：0—0、1—1、2—2 等等。现在想象把一根棒向右移动 n 厘米。移动以后，那棍棒上的所有数仍与不动的棒上的数一一对应。如果那根棒移动了 3 厘米，则棒上教的对应就是 0—3、1—4、2—5、……。移动的 n 厘米代表两棍棒长之差。不过，两根棒的长度仍然是阿列夫零厘米长。由于我们可以让二者之差 n 为我们所要的任何一个值，很明显用阿列夫零减阿列夫零就是一个不确定的运算。

饭店老板最后施的策略就是打开无穷多个房间。这表明如何用阿列夫零减阿列夫零得到阿列夫零。让每一个数与每一个偶数一一对应，则余下的是一个由全部奇数所构成的阿列夫零集。

由实数所构成的集合形成更高一级的无穷集，康妥称之为阿列夫 1。康妥的辉煌成就之一就是著名的“对角线证明”，它说的是阿列夫 1 的元素不可能与阿列夫 1 的元素构成一一对应关系。阿列夫 1 也就是在一条线段上全部点的数目。康妥证明了这些点怎样能与一条无限直线上的点一一对应，怎样与一方块上的点、与一无限大平面上的点；与一立方体中的点、与无限大空间中的点一一对应，如此下去还可以与超立方体或更高维空间中的点一一对应。阿列夫 1 又称为“连续统的势”。

阿列夫 2 是一切可能的数学函数——连续函数和不连续函数的数目。因为任何一个函数都可画为一曲线，我们把“曲线”取广义以包括不连续曲线，则阿列夫 2 就是一切可能的曲线数目。同样，如果我们所指的曲线是在一张邮票上，或者在一个无穷空间里，或者在一个无穷超空间里的全部曲线，这一切都没有问题，仍是阿列夫 2。康妥还证明了阿列夫 2 不可能与阿列夫 1 一一对应。

当一个阿列夫数被升级为它本身的幂，则产生一个更高级的阿列夫数，它不能与产生它的阿列夫数一一对应。因此，阿列夫数的阶梯向上是无穷的。

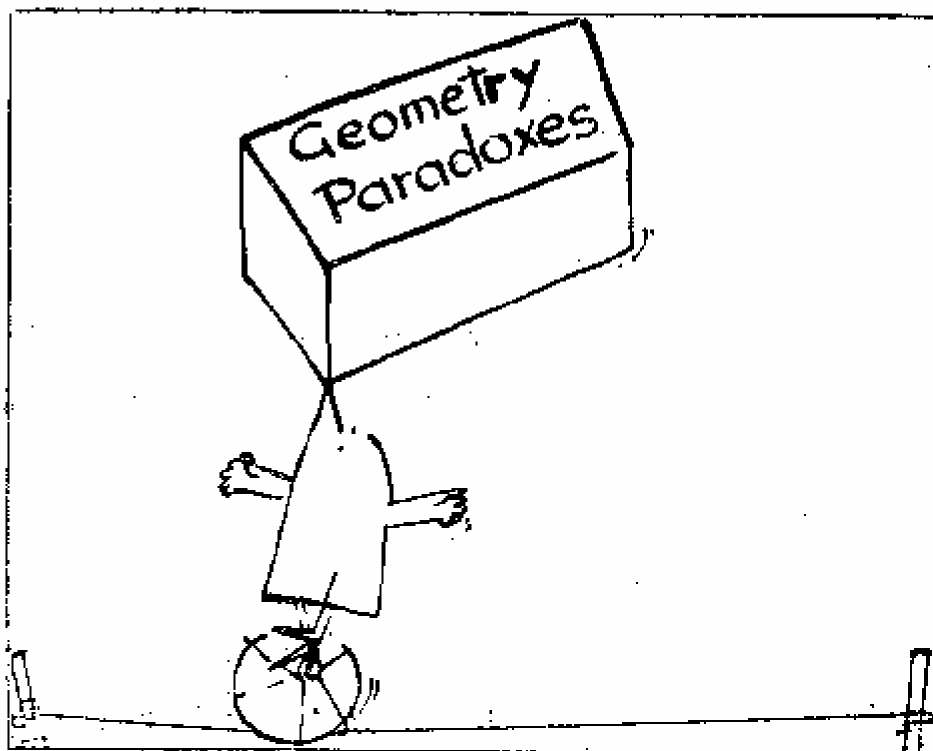
在阿列夫数之间有没有什么超限数？比如说，有没有一个数比阿列夫零大、比阿列夫 1 小？康妥确信不存在这种数。他的猜测成为著名的广义连续统假设。

1938 年，哥德尔证明标准集合论与不存在中介的超限数假设是一致的。1963 年，保罗·科恩证明，如果人们假定存在中介数，这也不与集合论矛盾。简言之，连续统假设是由表明它是“不可判定的”来判定的。

科恩的研究结果是：集合论现在分为康妥型和非康妥型的。康妥型集合论是假设在阿列夫数之间没有中介数。非康妥型集合论是假定有无限多个中介数。情况类似于几何学中，发现平行线假设不能被证明后，几何学分成了欧氏几何和非欧几何一样。

希望学习更多关于这些神秘的超限数知识的学生可以阅读爱德华·卡斯纳和詹姆斯·纽曼著的《数学与想象力》第二章“古格尔之后”和《科学美国人》1966 年三月号数学游戏部分。

第四章 几何学悖论



对大多数人来说，甚至对大多数在中学学习数学的学生来说，“几何”一词意味着欧几里得平面几何，它是研究平面图形的性质，在这里，我们将按费利克斯·克来因在一百多年前提出更广义的观点来认识几何，这就是研究几何图形在确定的一组变换群下保持不变的那些性质。

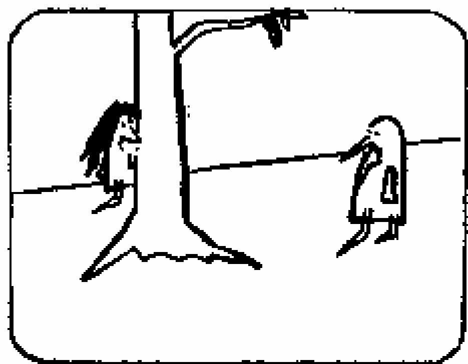
另一方面，拓扑学作为几何学的一个分支，它是研究图形在连续变形下不变的种种性质。这里所出现的“悖论”，如编手镯、把圆环的里面翻到外面来、不动点定理，凡此种种都是关于拓扑性质的。虽然现在中学一般不讲授拓扑学，但是拓扑学中的—些概念很容易为年轻人掌握，学生们将会被这些奇景所吸引和激励。

在介绍完这一章内容之后，可对几何学的不同分支做简短介绍，每一分支都是由允许使用何种变换来定义的，这将使学生熟悉克来因的几何学概念，它是现代数学最基本、最具普遍性的概念之一。自然我们要从欧几里得平面几何和立体几何开始介绍，在这里所允许的变换是平移、反射、旋转和相似变换。然后再一步步向前发展，介绍那些越来越特殊的变换，从而逐步定义仿射几何、射影几何、拓扑学以及点集理论。

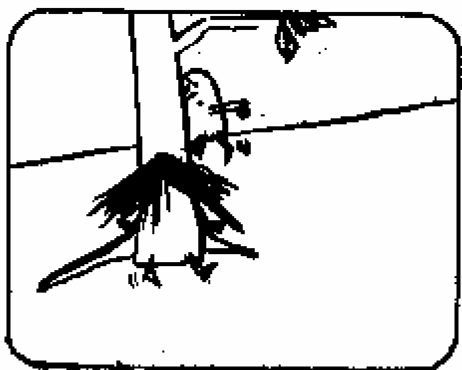
把一个不对称的图形变成它在镜中的象的反射变换，在这里之所见特别强调，是因为它提供了许多色彩斑烂的悖论，又在较新的几何研究方法中和现代科学中具有很重要的作用。镜面对称在化学中，特别是在有机化学中扮演很重要的角色，因为在有机化学里，几乎所有的碳分子的形状都对称地分为左右两半。此外它在结晶学、生物学和遗传学以及现代物理学中也具有很大的重要性。

在本章中所谈到的某些奇妙现象，虽然初看起来好象只是一种消遣而已，但是我们将会看到，它们中间的每一个都自然地把人们引向诸如群论、逻辑学、序列理论、无穷级数、极限理论等重要的数学领域。学生们可遵循这里所提出的方法以悖论为通途进入这些数学领域。一般来说，中学生们总是特别关心用圆规和直尺作图，以及一步步地证明几何定理，他们忽视了几何与其它数学分支之间的动人的联系，忽视了几何在天文学、物理学以及其它各门科学中的应用。

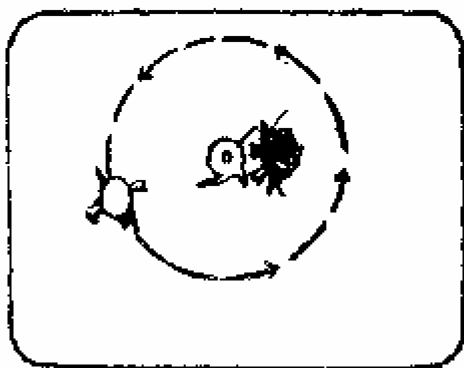
1 · 绕着一个姑娘转圈



甲：啊，梅蒂尔！你在树后藏着吗？



M：当这个男孩绕着树转的时候，梅蒂尔也这样做，她绕着树横走，鼻子总是朝着树，所以那男孩始终看不到她。



M：他们这样绕树转一圈后，都回到了原来位置。这时，男孩绕梅蒂尔转了一圈吗？

V_1：当然啰！他既然绕着树转了一圈，就必然绕着姑娘也转了一圈。

乙：瞎说！即使那里没有树，他也一直未能看到梅蒂尔的后背。既然是绕着一个物体转一圈怎么能看不到它的所有各面呢？

这个古老的悖论一般是以猎人和松鼠的形式出现。松鼠蹲在树椿上，猎人绕着树椿转的时候，松鼠也一直在转，所以它总是面向猎人。当猎人绕树转一圈后，他也绕松鼠转了一圈吗？

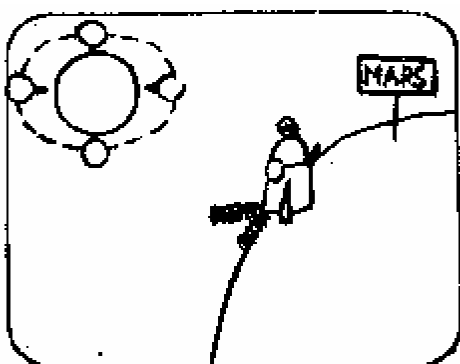
"绕着转了一圈"这意味着什么？如果我们在这方面没有一致看法，则对上面的问题显然是无法回答的。在我们日常说的话中，许多词没有确切的定义。威廉·詹姆斯的经典哲学著作《实用主义》一书中，有一段对"猎人和松鼠"这一问题的有趣探讨，他把这当作纯粹语义上的争论的一个典型。当双方一旦认识到他们所争论的只是如何定义一个词时，困难就很快消除了。如果人们更清楚地认识到术语的精确定义该是多么重要，那么许许多多尖锐的争论问题几乎就都会变得

象这个问题那样平凡易解。

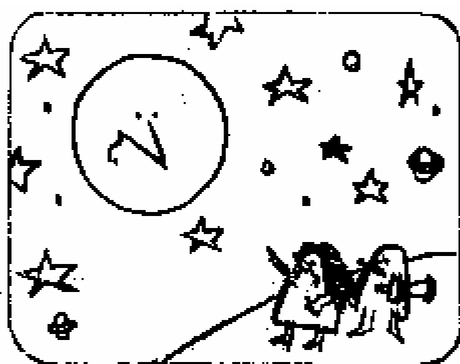
2·月亮的不解之谜



M：这个问题就象月亮本身那样令人迷惑不解，月亮总是以同一面朝向地球。当月球绕着地球转一圈以后·它绕各自己的轴旋转了吗？



甲：作为一个天文学家，我的回答是肯定的。如果你站在火星上，你就会看到每当月球绕地球转一圈，它就绕着自己的轴也转一圈。



乙：它怎么旋转了呢，爸爸？如果它旋转了，我们就会看到它不同的各面，可是我们看到的却总是相同的那一面。

M：月球绕轴旋转了吗？那个男孩绕姑娘转圈了吗？这些到底是真正的科学上的争论，或只不过是在词义上的分歧？

与前一个问题一样，这也只是对词义理解的含混造成的。“绕自己的轴旋转”这句话的确切意义是什么？这个问题必须澄清。对地球上的观察者来说，月球没旋转；对处在地球—月球系统外的观察者来说，它旋转了。

一些很有知识的人都曾极认真地研究过这个简单的问题，说起来这是很难使人相信的。奥古斯都·德莫尔干在他所著的《悖论集》一书的第一卷中，对十九世纪出版的探讨这个问题的小册子作了评述，这些小册子那是反对“月球旋转了”这一观点的。一个伦敦的业余天文学家，叫做亨利·皮瑞加尔的人在这场争论中真可谓之孜孜不倦，他的讣告中有这样一段话，“在整个一生中，他在天文学上的主要目标。是使别人相信月球并没有绕轴旋转。皮瑞加尔撰写小册子、构造模型甚至写诗来证明自己的论点，愿以英雄的豪爽来承担一切努力都毫无所得而引起的一个又一个的失望。”

我们现在说与这个月球之谜紧密相关的另一个奇妙的问题。让我们在黑板上

面两个大小相等、相互外切的圆盘，一圆盘沿着另一圆盘的边缘无滑动地滚动，滚动中保持边缘密切相切接触，这样绕着不动的圆盘转动一周以后，它本身旋转了几圈？

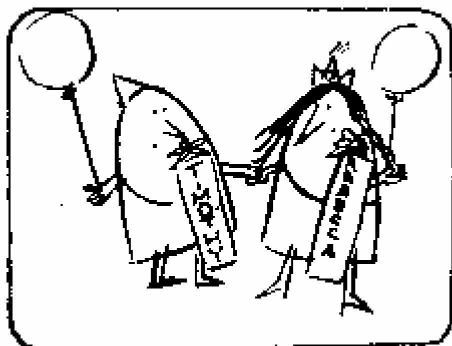
大多数学生将会回答：一圈。可以让他们用同样大小的两个硬币做试验，过后他们会惊奇地发现，那个滚动的硬币实际上旋转了两圈！

还有别的答案吗？这正像地球—月球那个问题一样，其答案也依赖于观察者的位置。相对于固定的硬币来说，它转了一圈，而相对于从上向下看的你来说，它旋转了两圈。这也曾是个激烈争论的题目。《科学美国人》杂志于一八六七年首次刊登这个问题，于是持有两种尖锐对立观点的读者的信如洪水般地涌来。

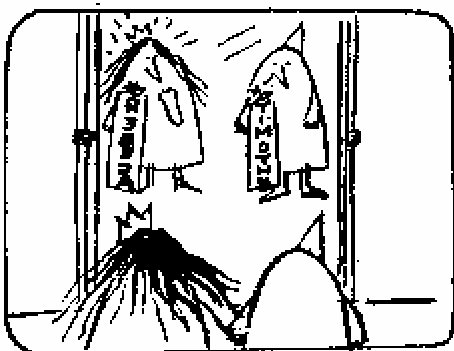
读者很快就认识到了硬币问题与月球问题之间的关系。那些坚持认为硬币只旋转一圈的人也同样认为月球根本没有绕轴旋转，一位读者以激烈的口气写道："如果你抡着一只猫在你头上转圈，那么它的脑袋、眼睛和脊椎骨都在绕着自己的轴旋转吗……？转到第九圈猫就会死去吗？"

来信急剧增多，以致于在一八六八年四月编辑部便宣布他们不再讨论这个问题，而在一种名为"车轮"的新月刊上专门讨论这个"重大的问题"。这个杂志至少出了一期，专门刊载着读者们精心制作的各种装置的示意图，他们把这些寄给编辑部用来证明自己的论点。

3 · 镜子的魔力



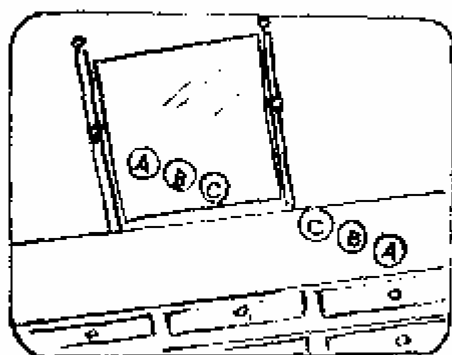
M：镜子是个更奇妙的东西。现么梯姆斯和丽贝卡正在一个晚会上做客，晚会上每个人都戴个名片。



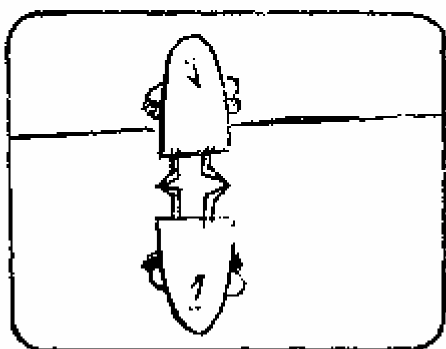
丽贝卡：多么奇怪的镜子啊，梯姆！你看，它把我的名字弄反了，可是你的名字却一点儿也没变！



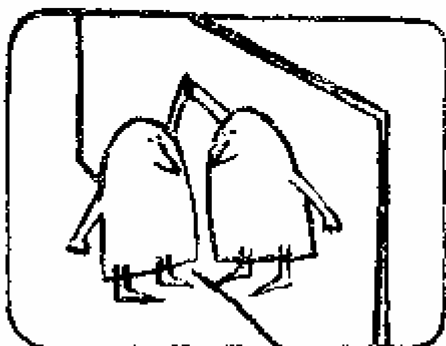
M：镜子好象只能使左右颠倒，为什么它不能使上下也颠倒呢？这难道不是很奇怪吗？



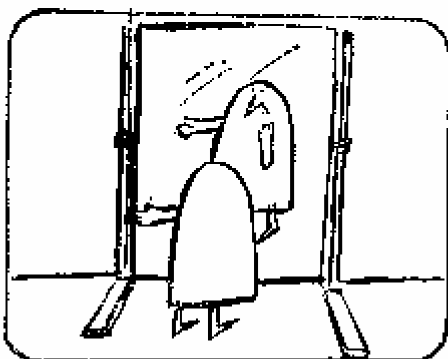
M：实际上，只有当一条线垂直于镜面时，镜子才使这条线颠倒过来。正因为这三个小球在一条与镜面成直角的线上，所以它们在镜中象的顺序就倒过来了。



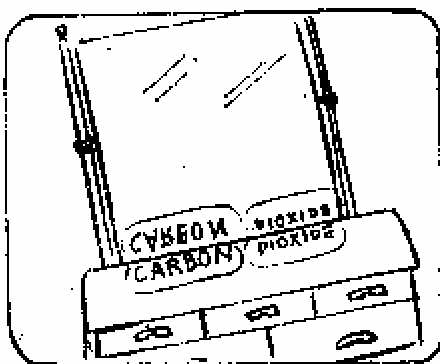
M：如果你站在用镜子做的地板上，你身体的上下轴线垂直于镜面。这时你在镜中的象前面仍是前面，后面仍是后面，但是你却上下颠倒了。



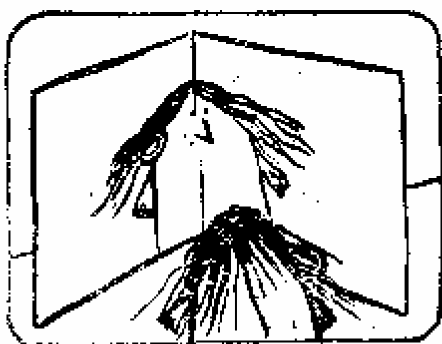
M：如果你侧着身子对镜面站着，你身体的左右轴线垂直于镜面。这时你在镜中的象脑袋还是在上面，前面仍是在前面，但是你却被左右颠倒了。



M：当你面对镜子站着的时候，你在镜中的象的脑袋仍是在上面，你的左面仍是在左面，可是你却被前后颠倒了。你的象中左手的位置和你走到镜面后再转过身来时左手的位置正好相反，因此我们说你被左右颠倒了。



M：在这幅画面中有两个英语字单词，为什么镜子只把其中的一个词颠倒了？实际上并非如此！另一词 DIXIDE 也同样被颠倒了，只不过它的对称性使它倒过来以后看起来仍和原来一样。



M：你能猜出当两个镜面垂直放置时会发生什么现象吗？这时镜子里的象将与平常镜中的象不同，它是完全没有被镜面颠倒的象！这位姑娘此时所看到的她自己正和别人所看到的她完全一样！

因为梯姆斯（TIMOTHY）这个名字的每个字母都有个竖直的对称轴，所以它在镜中的象与原来一样，但在丽贝卡（REBECCA）这个名字中只有字母 A 具有竖直对称轴，结果这个名字在镜中的象只有 A 没变，其它字母都被颠倒了。

为什么镜子会使左右颠倒，而不能使上下颠倒？这和上面所述及的关于月球和硬币的问题相似，也是词义上的问题，为了作出回答，我们必须在“左”、“右”、“颠倒”这几个词的意义上取得一致意见。为了进一步弄清镜子到底做了些什么，请读马丁·格德纳所著《具有两面性的宇宙》的前三章，本书包括大量有关镜面反射对称以及它在科学和日常生活中的作用的大量材料。

与 TIMOTHY 中字母不一样的是，DIOXIDE 中的每个字母都有一条水平的对称轴，所以如把镜面竖直放置在这个词的上边，它在镜中的象好象没有变。在 CARBON 中，C、B、O 也有水平对称轴，所以它们在镜中的象看起来也与原来一样，但是 A、R 和 N 都没有这样的对称轴，所以上边变成下边，下边变成上边。

可以让学生找出一些在镜面成象后看来与原来一样的英语单词，这是一个很好的课堂活动。第一步是查看所有的大写字母，并把那些具有水平对称轴的列出来。它们是 B、C、D、E、H、I、K、O、X。用这些字母可组成许多四个字母或多字母的词，如 CHOICE、COOKBOOK、ECHO、OBOE、ICEBOX、HIDE、DECIDED、CHOKED 等等，一共有数百个这样的词。

当学生把两个小镜面垂直放置并向两镜交角方向看去的时候，他就会看到自己的没有被镜面左右颠倒的象（需要稍为调整两个互相贴近的小镜的位置，使得在两镜中只看到单独一个的象为止）。如果学生眨一下左眼，镜中的象不是象想象的那样眨一下右眼，而是另外一边的眼睛眨一下，原来这时镜中象的面部左右两边已互换了位置，这是因为他的面部两边各被每个镜面反射一次、一共反射两次的缘故。

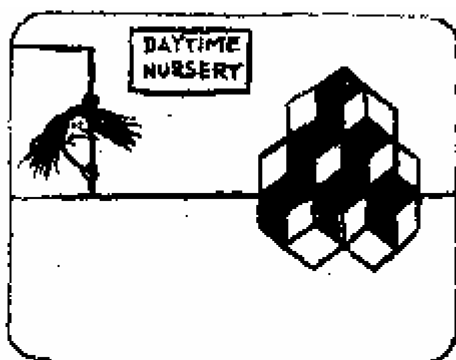
他看到自己这样的象也许会觉得很陌生，这是因为他在平常镜中所看到的自己的面部总是左右颠倒了的。虽然人的面部有个竖直的对称轴，但左右两边很少是完全一样的。当人们看到自己这个本来面目时，左右两边的微小差别就会使他感到这个象与原来的象有所不同，但是他自己也说不出不同在什么地方。他应该知道，正是这个面部才是他（或她）本人为外部世界所辨认的面部！此外，他本人往通常镜中的象对熟知他的人来说也同样会感到有些奇怪。到底哪个是真正的面部？

要想检查一下学生对这种“双镜”成象原理了解得如何，一个好办法是问一下他们，如果两镜面的邻接线是水平的而不是竖直的时候，他们会看到什么。这时所发生的两次反射将使面部上下颠倒！这个被上下颠倒的象是在普通镜面所看到的象吗？不是，它仍旧是没有被镜面左右倒置的象，如果学生眨一下左眼，那么

他这个上下颠倒的象仍旧是眨一下右眼。

这些镜面游戏可作为学习变换几何中的对称和反射的极好的导引。所有上面谈到的“悖论”都可以用初等的变换理论来解释（参看哈罗德·R·雅可比所著教科书《数学——人类的魄力》第五章的第 1、2、3 课）。

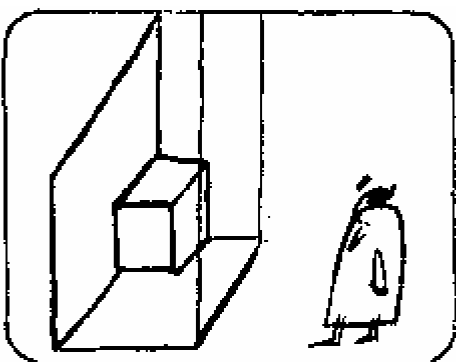
4 · 小立方块和女士



M：在这幅画中你数到了多少个小立方块？有六个？……有七个？



M：这画中画的是个年青姑娘吗？……或许你看到一个老太太？



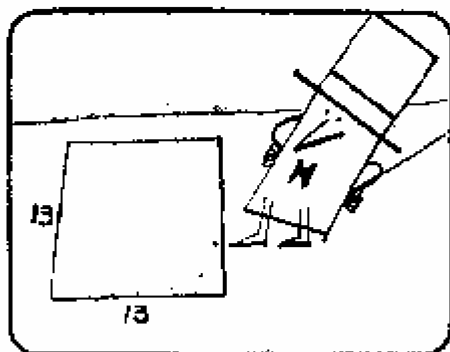
M：你在这幅画中者到了什么？……一个小立方块放在一个房间的一角？……一个小立方块贴附在一个大块的外面？……或许是一个大立方块在一角上有个立方形的洞？

这一段所列举的画面所造成的眼睛的错觉，都是对看到的同样东西做不同解释的实例。在第一例中，人们会把这一张平面团看作是一组小立方体的透视图，但是这个透视图可用两种不同方法来看，且每种解释方法都是同样有道理，这样，观察者的意念就在这两者之间来回转变。

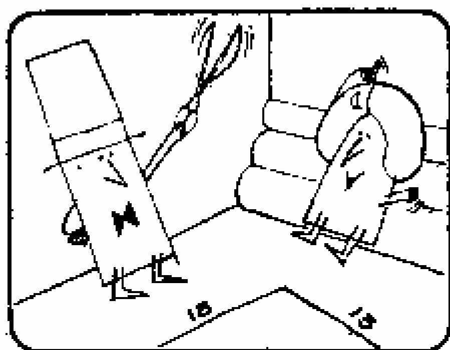
第二幅画也是这么回事。你在面中不是看到一位年青姑娘，就是看到一位老太太，不可能哪个也没看到。观察者的意念在这两者间来回跳动。

第三幅画有三种解释方法。对大多数人来说最困难的一种是看出一个大立方块上有个立方形洞，因为这是较少见的，但是我们如果不住地盯着看，尽力地把画中的小立方体看成是个洞而不看成一个实体，最终将会领悟这种解释。学习用三种可能的方法来看这个图与解释几何图形的能力有很密切的关系，这种能力十分重要。众所周知，在几何中看图看得不正确是产生误解的一个重要原因。

5·兰迪先生的奇异地毯



M：世界著名的魔术家兰迪先生有一块长宽都是 13 分米的地毯，他想把它改成 8 分米宽 21 分米长的地毯。

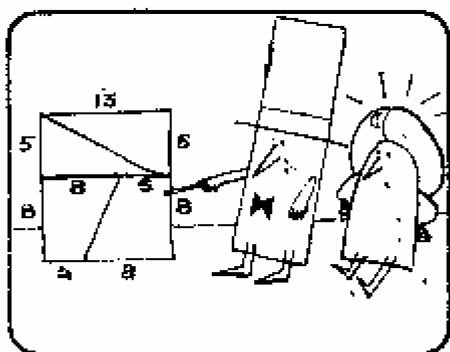


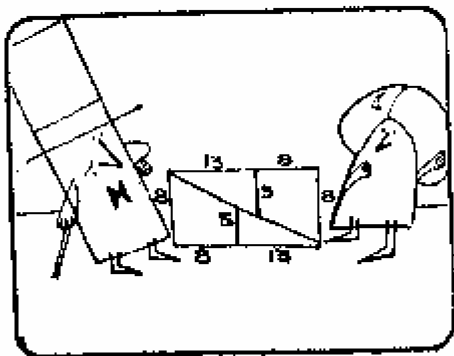
M：兰迪先生拿着这块地毯去找地毯匠奥马尔。

兰迪：奥马尔，我的朋友！我想让你把这块地毯裁成四块，再把它们缝在一起成为一块 8 分米×21 分米的地毯。

奥马尔：很遗憾，兰迪先生。您是个伟大的魔术家，可是您的算术竟这样差！13 乘 13 是 169，8 乘 21 是 168。这怎么能办得到呢？

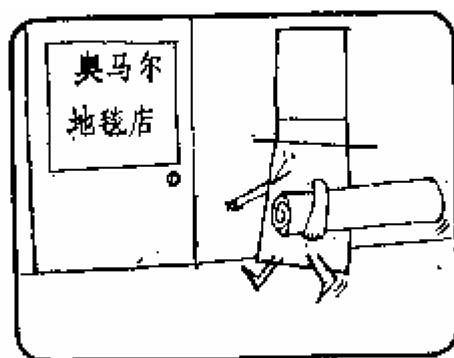
兰迪：我亲爱的奥马尔！伟大的兰迪是从来不会错的。劳您的驾把这块地毯裁成这样的四块。





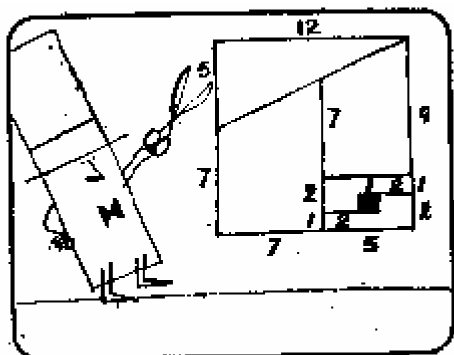
M：奥马尔象他所说的那样做了。过后兰迪先生把这四块重新摆一下，再让奥马尔把它们缝在一起，这样就得到了一块 8 分米×21 分米的地毯。

奥马尔：这怎么可能呢？地毯面积由 169 分米^{2}缩小到 168 分米^2！那一平方分米哪里去了？



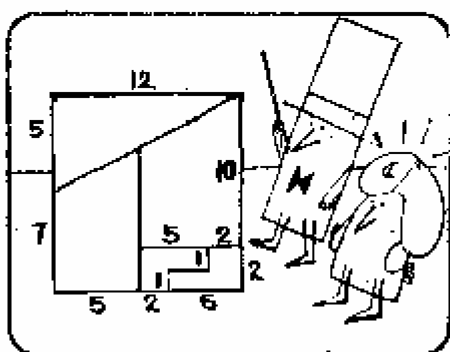
M：几个月之后，兰迪先生又拿来一块长宽都是 12 分米的地毯。

兰迪：奥马尔，老伙计！我的电热器翻倒了，结果把这块美丽的地毯烧坏了。把它剪裁一番再缝上，很容易就可去掉这个窟窿。



M：奥马尔表示怀疑，但他还是按兰迪所教的方法做了。

把裁好的几块缝在一起之后，它仍然是长宽各 12 分米但那个窟窿却消失了！



奥马尔：兰迪先生，请讲一讲，你是怎么做的？补上这个窟窿的那一平方分米是从哪里来的？

这个古老的故事是这样的令人惊奇和难以解释，值得我们化费一些时间动手按照所说的方法做一做。我们在作图纸上画一个正方形，把它剪成四块，重新安排一下，拼成一个长方形。除非这个图做得很大并且作图和剪裁都搞得十准确，人们是不会发现拼接成的长方形在主对角线附近发生了微小的重叠。正是沿对角线的这点不完美的叠合导致丢失了一个单位的面积。如果学生们不相信这一点的话就让他们计算一下长方形对角线的斜率以及拼接前各片相应边的斜率，再把它

们加以比较就会清楚了。

如果先画出上边所说的这个长方形，按图示把它剪成四块，再拼成正方形，这时这个正方形又会怎样呢？这是在课堂上学生们可能希望探讨的问题。

上文涉及到四个长度：5，8，13，和 21，我们会认出这是一个著名的数列中的四项。可以让学生找出这个数列各项的构成规律。显然，这就是有名的菲波拿齐数列，它的每一项都是前两项之和：1，1，2，3，5，8，13，21，34，……。

学生们可使用这个数列的其它相邻四项来试验上述过程，无论选取哪四项，他们都会发现所作出的正方形和长方形的面积是不会相等的，但有时长方形比正方形小一个单位面积，有时长方形此正方形大一个单位面积。我们应该进一步确定，什么时候在拼接成的长方形中失去一个单位面积，也就是说在长方形的对角线附近有个呈菱形形状的重叠，什么时候长方形又会多得一个单位的面积，也就是说在拼接成的长方形对角线上出现一个菱形的空隙。

对这个菲波拿齐数列多做几次上述的试验，有人就会凭直观得出菲波拿齐数列的一个重要性质：这个数列任一项的平方等于它前后相邻两项之积加 1 或减 l。用公式表示，则为：

$$t_n^2=(t_{n-1}*t_{n+1})\pm1$$

左边 t_n^2 是正方形的面积，右边 $(t_{n-1}*t_{n+1})\pm1$ 是长方形的面积。当 n 从小到大依次取正整数时，上式中的正负号交替出现。如果一数在该数列中的位置数，即它的项数是奇数（如上面数列中的 2，5，13 等），则这个数的平方较前后相邻两偶数项之积多 1；反之，偶数项的平方较前后相邻两奇数项之积少 1。知道了这一事实，我们就可以预见由正方形剪接而成的长方形是多得了一个单位面积还是丢失了一个单位面积。

上面的这个菲波拿齐数列以 1，1 两数开始，广义的菲波拿齐数列可以从任意两数开始。用另外的一些菲波拿齐数列做上述试验，学生仍将会发现一些新东西。比如说，用数列 2，4，6，10，16，……做试验，就会多得或丢失四个单位面积，数列 3，1，7，11，18，……的“得”或“失”是五个单位面积。

设 $\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$ 是一个广义菲波拿齐数列相邻的三项，以 x 表“得”或“失”的数字，则下面两式成立：

$$\begin{cases}\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}\\ \underline{b}^2=\underline{a}\underline{c}\pm\underline{x}^2\end{cases}$$

我们可以用任何一个设想的得失数来代式中的 x，用任何一个数来代式小的正方形边长 b，然后解上面的联立方程就会求得 a 和 c 的值，当然这样求得的值不一定是有理数。

学生们一定会喜欢这样一个十分有趣的问题：把正方形按上述方法剪成四块，是否会拼接成一个与它面积相等的长方形？

为了回答这个问题，令第二个方程中 x 等于零，解这个方程组，用 a 表示 b，则得到唯一的正解是

$$\underline{b}=\frac{(1+\sqrt{5})\underline{a})}{2}$$

上式中的 $(1+\sqrt{5})/2$ 恰是著名的黄金分割比，通常用 Φ 来表示。它是一个无理数，等于 1.618033……。这就是说，唯一的每项平方等于前后相邻两项之积的菲波拿齐数列是

$$1，\Phi，\Phi+1，2\Phi+1，3\Phi+2，\ldots\ldots$$

这对学生来说是做根式演算的一个很好的练习。

只有用上面这个数列相邻两项表示的长度来分割正方形才会得到本段所述的几何悖论的另外一种形式：长方形和正方形的面积相等。如要更多地了解黄金分割比率以及它与上述正方形—长方形几何悖论之间的关系，请参看《科学美国人》杂志数学之谜和数学游戏第二集一书中关于黄金分割比率的那一章。

两个全等正方形怎么会有不同的面积呢？在兰迪的第二个地毯悖论中，所丢失的面积是一个实实在在的窟窿。与前一问题不一样的是，这里的两个图形在各自的那条斜线上都是完美地接合在一起，并无重叠和空隙。学生们能够找出那个不见了的单位正方形到哪里去了吗？

为了帮助学生们找到答案，可建议他们做两个全等的、上面没有孔洞的正方形，做得越大越好。把其中的一个按图中的式样精确地剪成所需要的五块，把它们重新安排一下拼成那个带孔的图形，最后把它放到未经剪切的正方形上边。待两者的上边和两侧边都重合后，他们就会发现那个带孔的图形不是真正的正方形。它实际上是个长方形，比正方形高 1/12 分米，于是它的底部就多出一个 12 分米×1/12 分米的窄带，其面积恰好与地毯上的孔洞面积一样。

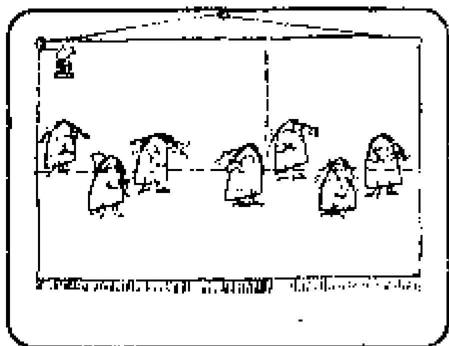
这样解释了那个正方形的一个单位是如何消失的，然后学生们就可以再设法找出正方形高度增加的道理。其秘密在于：在没有孔洞的那个正方形的分割图形中，直角三角形斜边上那个顶点并不是整数网格点[*]。学生们发现了这点之后，他们就可以自己设计出许多各种各样的正方形，使得在拼成长方形后，“多得”或“失去”的多于一个单位的面积。

上述这一奇妙的事实以“卡瑞正方形”的名字为大家所熟知，这是因为它的发明者是一个名叫保罗·卡瑞的业余魔术师。这种悖论还具有好几种其他表现方式，三角形也是其中之一。学生们要想探讨卡瑞正方形或卡瑞三角形，则需阅读马丁·戈德纳所著《数学，魔术和奇迹》一书的第八章和《科学美国人》杂志中的《数学新分支》一书的第十一章。

---

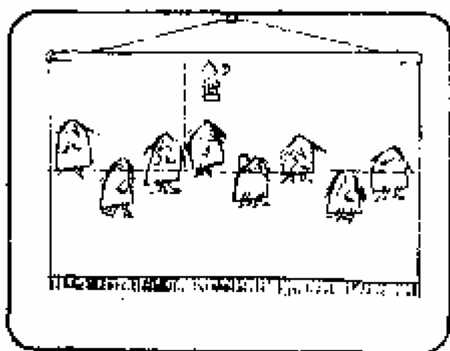
[*] 这个点到该正方形底线的距离并不等于 9 分米。在这个没孔洞的正方形图形上进行计算，使用相似三角形原理可算得这个距离是 $7+5\times\frac{5}{12}=7+\frac{25}{12}=9\frac{1}{12}>9$，而在拼成的有孔洞的图形中，这条线的长度却被视为 9 分米！——译注

6 · 失踪的舞蹈家



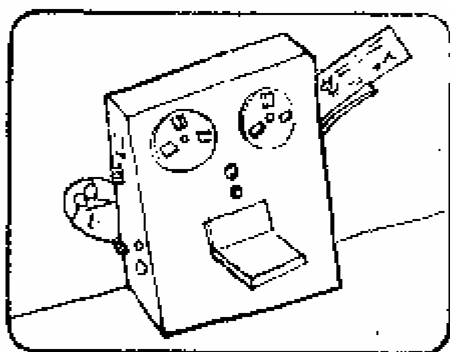
M：一年之后，兰迪先生又回来了，带来一块东方的挂毯。

兰迪：奥马尔，这挂毯仅有七个跳舞的姑娘，我希望有八个，请作把它裁成这样的三块。

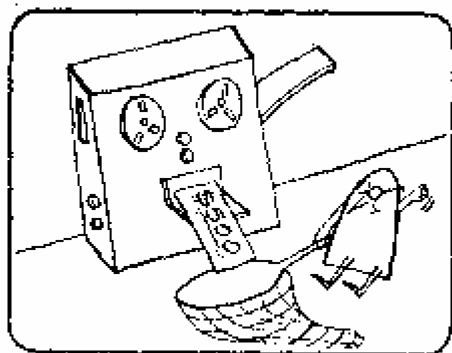


M：奥马尔裁过以后，兰迪先生把上面的两块互换一下位置。奥马尔数一下姑娘的个数：

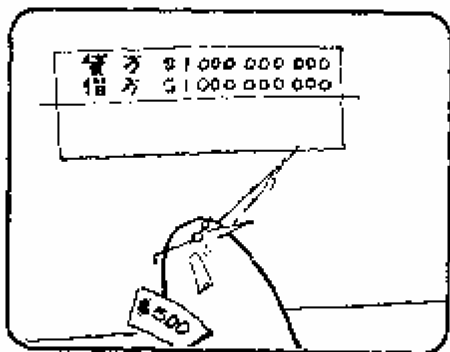
奥马尔：一、二、三、四、五、六、七——八个！仁慈的阿拉啊，这第八个姑娘是从哪里来的呢？



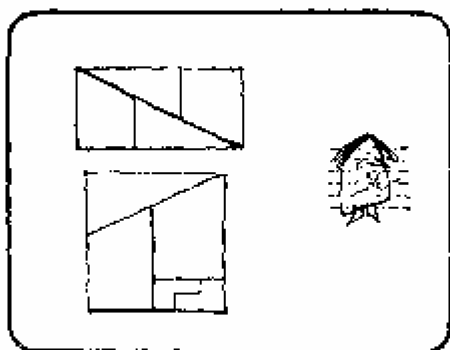
M：信不信由你，兰迪先生的这一做法与那些行为不端的计算机程序设计师试图从大银行里偷钱所用的方法有些共同之处。



兰迪：伙计，我难道不是个天才吗？我一个月就能白得 500 美元，何况做起来易如弹指！我只是告诉计算机在计算利息时，把每个户头美分以下的零数全都舍去而不是实行四舍五入！



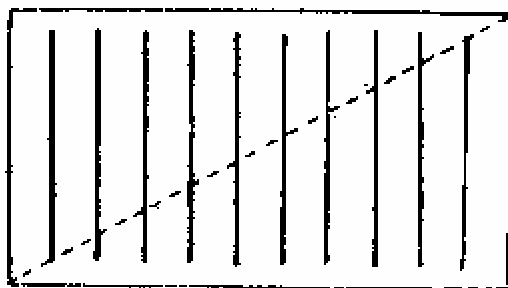
兰迪：这样，每个户头每月大约损失半美分，这么点儿钱谁也不会理会。但银行里有十万个户头，所以他们每月总共损失 500 美元。计算机每月都将这笔钱存入我的秘密户头上，而银行的账目依然总是平衡的！



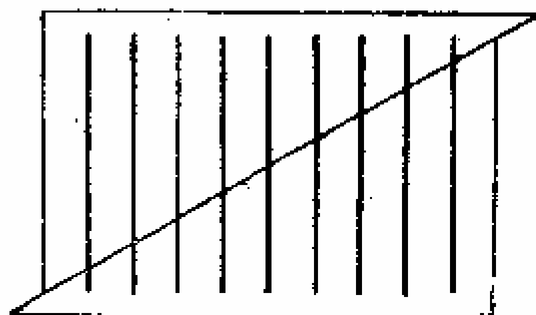
M：兰迪先生所做的这几件奇事都是靠从许多地方各拿取一丁点儿来凑成一个可观的数量。第一块地毯在对角线附近有一小片人们觉察不到的重叠部分；第二块地毯去掉烧坏的窟窿后比原来略微短了一点儿；而这八个舞女也都比原来小了一点儿。

上述这些颇劳神思的关于图形方面的悖论常常被用作广告的帮衬。十九世纪八十年代美国著名的谜题发明家山姆·劳埃德按这个悖论做成一个环形画面，画面上有个中国武士，当圆盘转动时，就看不见这个武士了。自那以后，就刊印这种游戏的许许多多的其它形式，有些是环形画面，有些却是平面形画面。

解释这种奇妙现象的最好方法是用直尺在卡片上按下图方式画出十条线：



沿图中虚线把卡片剪开，然后把下半部向左下方滑动：



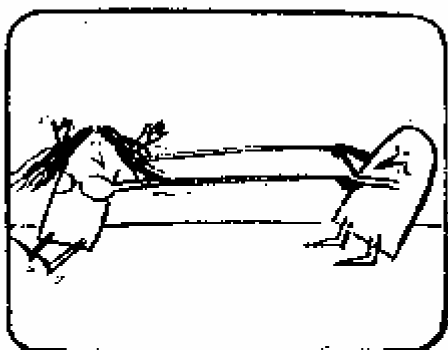
再数一下卡片中的线，只有九条！如果要问原来的十条线中哪一条消失了则是无意义的。实际上在上述过程中，十条线一共被分成十八份，经重新安排后，

组成了九条线。显然，这九条线中的每一条都比原来的线长出了 1/9。当把下半部分移回到原位置后，第十条线又出现了，此时所得到的每一条线都较原来短了 l/10。

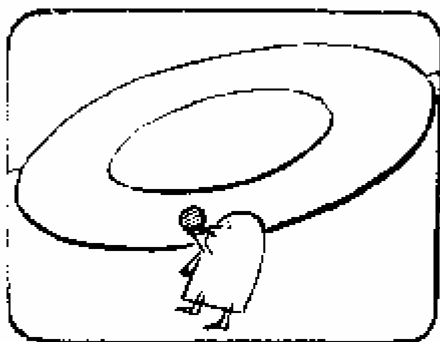
对于有舞蹈家的画面，其道理也完全一样。当画面上出现八个姑娘时，每一个要都比出现七个时要短 1/8，当我们再变回去时，不可能找出是哪个姑娘消失了，因为这七个姑娘是由完全不同的姑娘所组成的，而且每个又比先前长 1/7。读者要想读到对此更详尽的叙述或其它与之有关的东西，请参阅《数学，魔术和奇迹》一书的第七章。有一种古老的伪造方法正是以这种原理为基础的。按照上面分线段的方法可见把九张钞票分成十八份，经重新安排后就做出了十张钞票。但这样伪造的钞票很容易被侦破，这是因为票面表示币值的两个数字已不相匹配。在美国的所有钞票上，这两个数字都是位于相对的两端，但其中一个高些，另一个低些。这正是为了挫败这种伪造企图。1968 年，伦敦一个男子由于对 5 英镑面值的钞票使用这种方法进行伪造，结果被判处了八年徒刑。

上面所叙述的那个欺骗银行的故事是在七十年代初期发生在美国的一桩诈骗案为背景的。这个银行的计算机程序设计师把所有的支付利息数额中美分以下的零头一律舍去，而不是实行四舍五入。先把多余的钱贮存在计算机的记忆装置里，稍后就把款项存入最后一个户头——这正是程序设计师本人的户头。

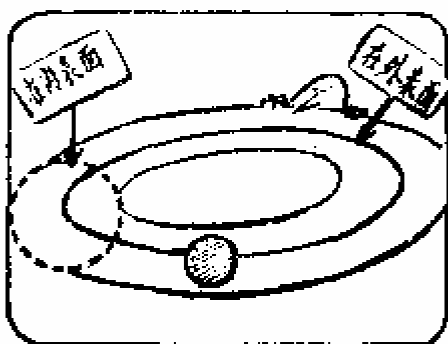
7·可内外翻剥的奇妙轮胎



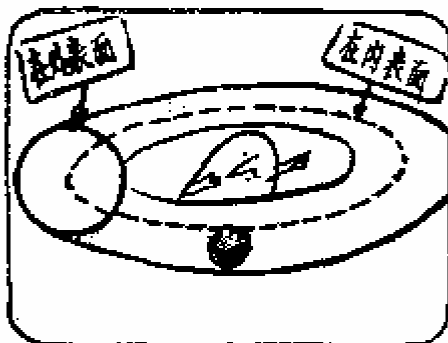
M：拓扑学被称做橡皮几何，因为它是研究图形被拉伸和扭曲后不变的性质。



M：有一种形如轮胎的迷人的曲面圆环。设想一个用薄橡皮做的轮胎，它上面有一个大孔，你认为能从这个孔把它的里面翻到外面来吗？这的确是可以做到的，但是很困难。



M：在把圆环翻转之前，设想我们按左边画面的办法把一个小橡皮圈粘在它的内表面，又把一大橡皮圈粘在它的外表面。这两个橡皮圈显然没套在一起。



M：这就是圆环被翻转后的样子。这时这两个弹性圈已套在一起了！但是不经过剪开和粘上的过程就把两个圈套在一起是不可能的，所以一定是哪里出了错。但是错在哪里呢？

我们确实可以通过圆环上的一个孔把它的里面翻到外面来，但这并没有使那两个橡皮圈套在一起，其理由是圆环翻过来以后，两个橡皮圈都已改变了位置，小圈被拉伸成大圈，而大围被压缩成小圈，所以它们还是像从前那样没有互相套

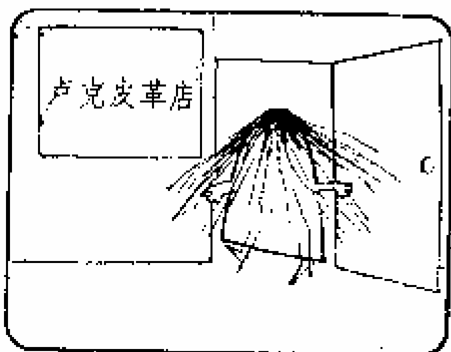
着。产生这种错误结论的关键在于画家特意把圆环翻转后的样子画成我们可能想象的那样，而没有按实际的情况画出。

用橡皮做的圆环模型，例如一个车轮的内胎，是很难通过它上面的一个扎把它翻过来的，因为在这过程中橡皮必须经过大幅度的拉伸。如果使用一个布制模型就很容易做到这一点。把一方块布对叠起来然后把两个相对的边缝在一起，这就成了一个烟筒。在另一个方向上再把这个筒对叠起来，把筒相对的两头沿着它们的边缘缝起来，就做成一个圆环模型了。如果把它摊平，则呈方形。为翻转方便起见，所开的“孔”是位于外层布上沿水平方向剪开的一个长口。

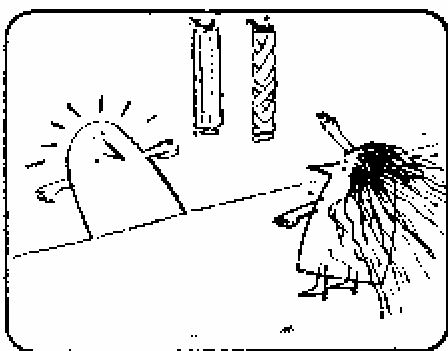
通过这个开口很容易把这布制圆环翻过来。翻过来以后，它和以前具有同样的形状，但这时那个长口已成为竖直的了，布面的纹理也都转动了 90°。换句话说，原来在某个方向上环绕圆环的一条线，现在已在另一个方向上环绕圆环。为了更清楚地看出纹理的旋转如何导致两个弹性圈位置的互换，你可以把沿着某个方向环绕圆环的圈用墨水涂上一种颜色，而另一方向上的第二个圈涂上另一种颜色。把圆环翻过来以后，你就会看到两个圆圈互换了位置。

要想象出在翻转过程中间环变形的具体过程是不容易的。我们可以在下列书刊中看到一步步描绘圆环翻转过程的一系列面面：1950 年《科学美国人》一月号阿尔伯特·塔克尔和赫伯特·贝莱的文章《拓扑学》；生命科学文库《数学》一书的第 179 页。

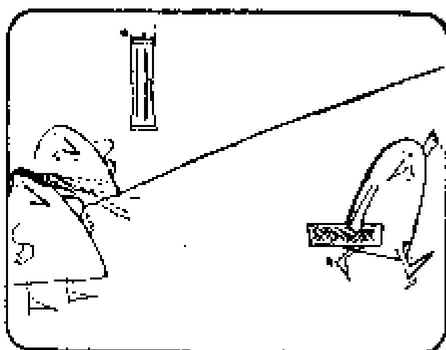
8 · 使人为难的编织问题



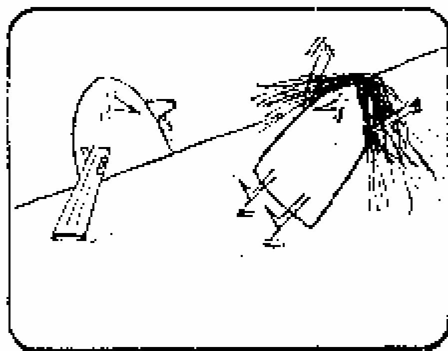
M：文迪女士要买一个皮手镯。



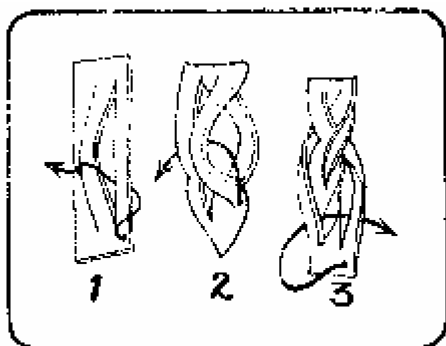
M：在卢克的商店里她看到两个手镯，每个都由三条带构成，其中一个已经编好了，另一个还没有编。



文迪：编好的那个手镯要多少钱？
卢克：五美元，太大。但您来晚了，它已经卖出了。



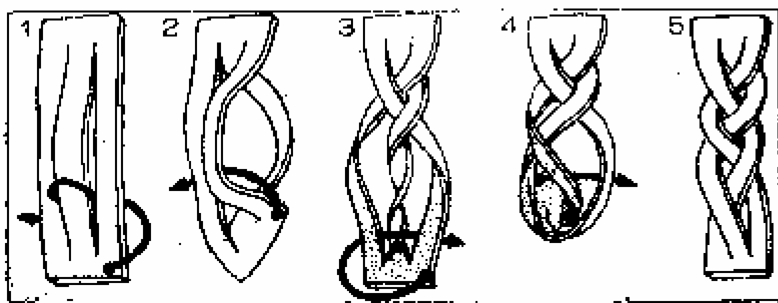
文迪：唷！还有手镯可买吗？
卢克：还有这个。
文迪；可是它还没有编呢？
卢克：我很乐意为您把它编好，太太。



M：这看来好象是不可能的，但是卢克仅用 30 秒钟就把它编好了，并且没有切断一条带。你看，他是这样开始编的。

大多数学生仅仅把这手镯当成拓扑学的又一奇观，但还不止于此。著名的德国数学家艾米尔·阿尔丁创立了一套有关“编织”的理论，其中用到了群论。在这个群里，“元素”是指“编织式样”，而“运算”是指让一个式样紧随另一式样因而产生一个新式样的过程。而“逆元素”则是指式样的镜象。编织问题为群论和变换理论提供了一个极好的起点。载于《数学教师》杂志 1959 年 5 月号上阿尔丁的文章“编织理论”是一个很好的入门教材。

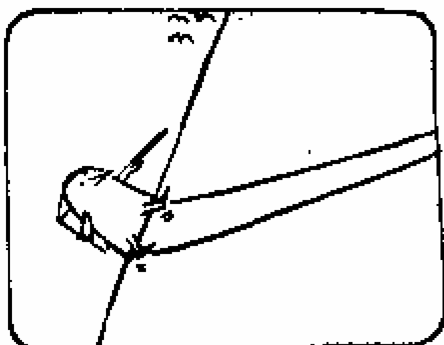
令人惊异的是，在这个有六处交叉的手镯编织过程中，三条带子的端部始终是连结在一起的。这就意味著，编好的手镯与没编的手镯是拓扑等价的。下图表示的是编手镯的步骤。



如果带子再长一些，我们就可以重复使用这个步骤，只要带子足够长，编成的手镯的交叉数可以是 6 的任意倍数。如果学生们想用这种方法把硬皮革做成一个实用的手镯或编带，则需把皮革浸在热水里使之变得柔软以后再进行编织。

对多于三条带子组成的手镯也可以用这种方法编织。要想进一步了解这方面的知识请读 J.A.H. 谢泼德的文章“对两端分别连在一起的若干条带子进行编织”，载于《皇家学会会报，A》第 265 卷（19623 年），229——244 页。

9·不可逃遁的点

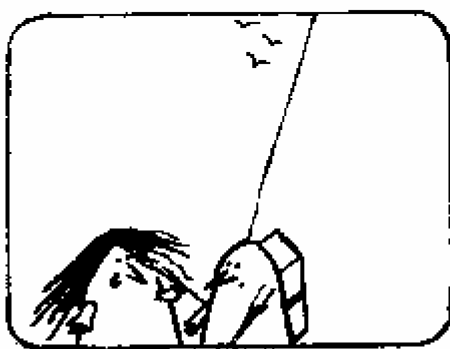


M：帕特先生沿着一条小路向山顶进发。他早晨七点动身，当晚七点到达山顶。



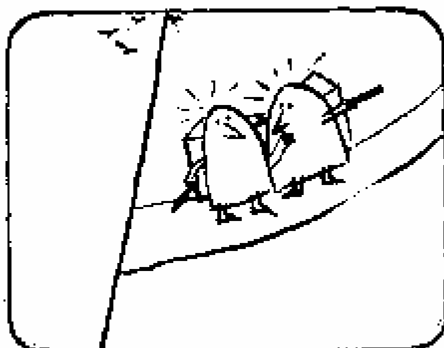
M：他在山顶做了一夜的考察工作，第二天早晨七点沿同一条小路下山。

M：那天晚上七点钟，他到达山脚。在那里，他遇到了他的拓扑学老师克莱因夫人。



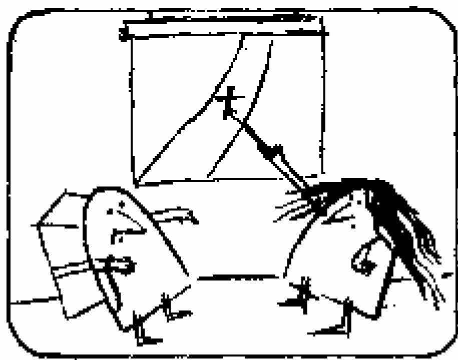
克莱因：你好，帕特！你可曾知道你今天下山时走过这样一个地点，你通过这点的时刻恰好与你昨天上山时通过这点的时刻完全相同？

帕特：您一定是在开我的玩笑！这绝对不可能。我走路时快时慢，有时还停下来吃饭和休息。



M：尽管这样，克莱因夫人还是对的。

克莱因：当你开始登山的时候，设想你有个替身在同一时刻开始下山，你们必定会在小路上的某一点相遇。



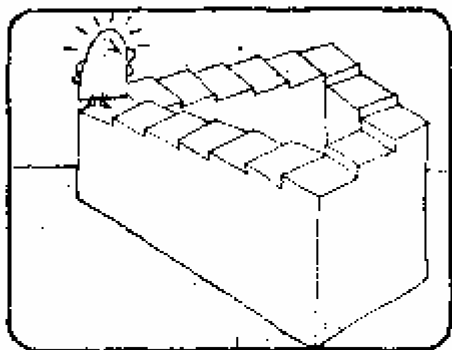
克莱因：我不能断定你们在哪一点相遇，但一定会有这样一点。你和你的替身当然是在同一时刻经过这一点。正因为这样，我才说在小路上一定有这样一点，你上山和下山时经过这点的时刻完全相同。

这个故事为拓扑学家所称的“不动点定理”提供了一个很简单的例证。其证明是个“存在性证明”，它告诉我们至少存在一个这样的点，并没告诉我们这个点在什么地方。当把拓扑学应用于其它数学分支或其它各门科学时，不动点定理起着非常重要的作用。

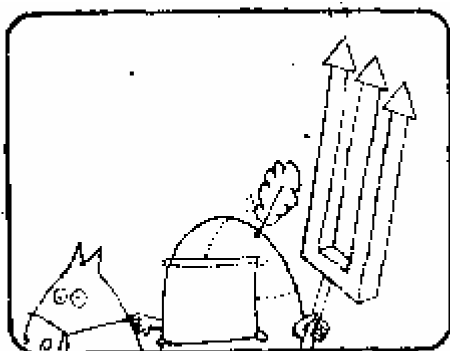
学生们一定会对下面这个著名的不动点定理感兴趣。这个定理可以这样来说明：取一个浅盒和一张纸，纸恰好盖住盒内的底面。可想而知此时纸上的每个点与正在它下面的盒底上的那些点配成对。把这张纸拿起来，随机地揉成一个小球，再把小球扔进盒里。拓扑学家已经证明，不管小球是怎样揉成的，也不管它落在盒底的什么地方，在揉成小球的纸上至少有一个这样的点，它恰好处在它盒底原来配对点的正上方！关于这个定理可参见理查德·库朗和赫伯特·罗宾斯所著《什么是数学？》一书中“一个不动点定理”这一节。

这个定理首先为荷兰数学家 L.E.J. 布劳尔在 1912 年所证明。它具有许多奇妙的应用。例如，由这个定理可以断言：在任一时刻，在地球上至少有一个地点没有风。用它还证明了这样的事实：如果一个球面完全被毛发所覆盖那么无论如何也不能把所有的毛发疏平。有趣的是，我们却可以把覆盖整个圆环面上的毛发疏平。

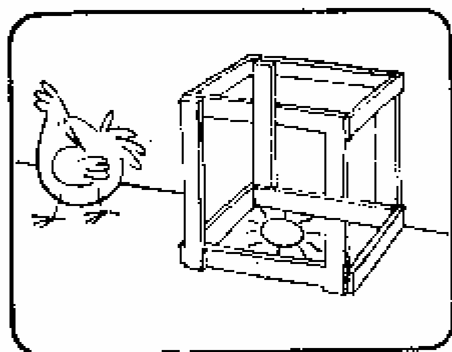
10 · 形状怪诞的形体



M：如果说帕特对存在着那样的不动点感到惊奇的话，那么他将对这样的台阶更为惊奇。他可以永远地沿着它转圈，但却总是在向上攀登，而且一次又一次地回到他原来的位置！



M：这位骑士的武器上有两个尖儿，还是三个尖儿？



M：你能做出这样一个怪诞的板条箱吗？这样的台阶、骑士武器和板条箱都称为不可能的形体是不是为怪的。

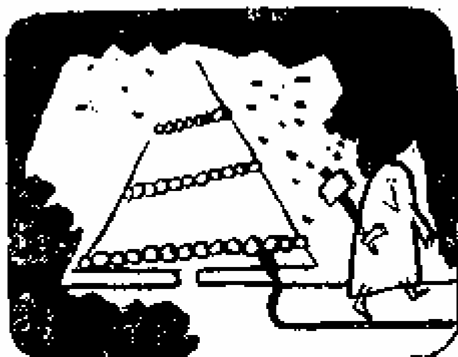
这里我们看到一些所谓“不可能的形体”或称“不能确定的图形”是个什么样子。这个“不可能台阶”是由英国遗传学家列昂尼尔·S·彭罗斯和他的儿子，数学家罗杰尔·彭罗斯发明的，后者于 1958 年把它公布于众，人们常称这台阶为“彭罗斯台阶”。荷兰画家 M·C·伊谢尔对此深感兴趣，他在他的石版画“攀高和下行”中充分地利用了“彭罗斯台阶”。

至于那个不知是有两个尖儿还是有三个尖儿的武器图形，不知出自何处。自 1964 年它开始在一些工程师以及其它一些人中间流传。《疯狂》杂志 1965 年 3 月号的封面画的是阿尔弗雷德·E·纽曼把这个东西立在自己的食指上（这个封而的复制品登在《数学——人类的魄力》一书的第 487 页上）。

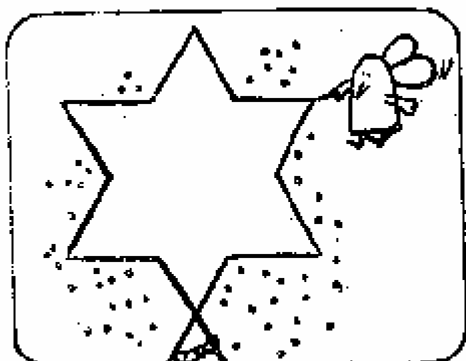
那个怪诞的板条箱的出处亦不可考，它出现在伊谢尔的另一幅画“瞭望塔”的画面上。这三件不可能形体让我们知道，我们常常很容易被一些几何图形所迷惑，认为它表示一个实际存在的形体，而实际上它们在逻辑上是矛盾的，所以是不可

能存在的。在本书第一章中，我们曾举出一个不确定句子“这句话是假的”。而这些不可能形体正是它在视觉上的类似产物。

11 · 病态曲线



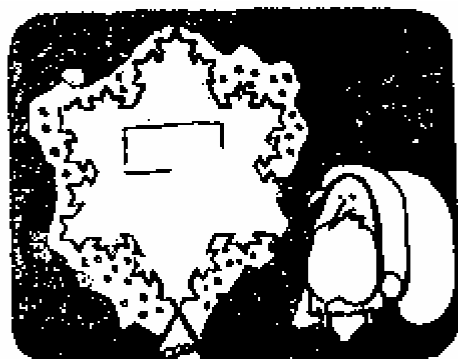
M：雪花曲线是另一种奇妙的曲线，但它不是不可能曲线。我们从这圣诞树——它的形状是等边三角形——开始来画这条曲线。



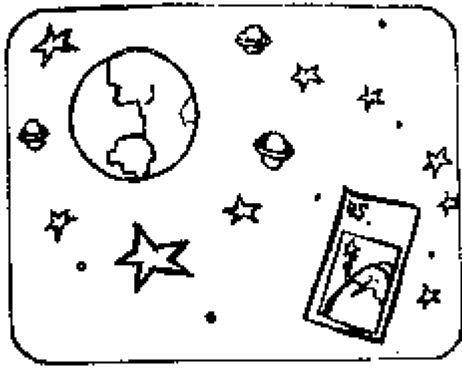
M：这位小天使把这蓝色的等边三角形每边分成三等分，再在每边中间的三分之一部分向外各画一个粉红色的等边三角形，这样就做成了一个六角星。



M：她再在六角星的每边上用同样的方法向外画出桔黄色的更小的等边三角形。曲线变得越来越长，开始象一个雪花了。



M：再重复一次这个过程将使曲线变得更长，更美丽。



M：按照这个方法不断画下去。你愿意曲线有多长，它就可以有多长。虽然它可以画在一张邮票上，但它的长度可以达到从地球到最远恒星的距离！

雪花曲线是最美丽的“病态曲线”之一，这些曲线所以被称为“病态”是因为它们的怪诞性质。这些曲线构成一个无限集合。如果上面这个画雪花的过程无限继续下去，其长度将趋于无限大，但它却始终是围在一个有限的区域里。这就是说，一步一步画出的每条曲线的长度构成一个发散数列，但是每条曲线所围的面积却构成一个收敛数列。它收敛到第一个等边三角形面积的 8/5 倍。另外的一个奇怪性质是：在极限曲线上的任一点都不能确定它的切线。

研究雪花曲线是巩固极限概念的一个好方法。可以把下面这个题目做为课堂练习，即假设第一个等边三角形的面积是 1，证明极限曲线所围面积是 8/5。

我们还建议做下列几种辅助活动：

（1）画出“反雪花”曲线，即向里画三角形，而不是向外画，在这同时把新画三角形的底线擦掉。这样第一步画出的是汇集于一点的三个菱形，有点象螺旋桨的叶片。把这个过程无限继续下去，这时所构造出的极限曲线其长度也是无限大吗？它也围在一个有限的区域里吗？

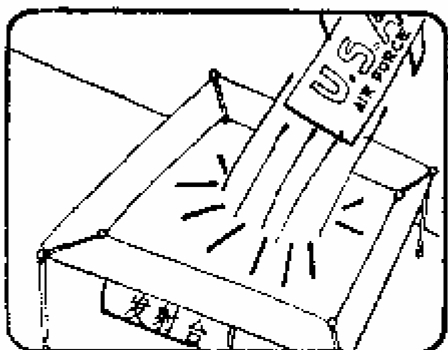
（2）研究以其它正多边形做基础用类似方法四曲线所产生的结果。

（3）研究在每条边上画多于一个正多边形所产生的结果。

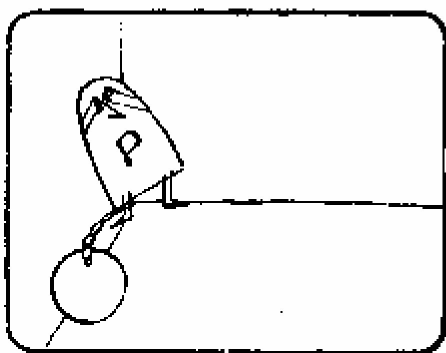
（4）研究上述各种构造方法在三维空间的类似结果。比如说，在一个正四面体的各面上再做一些小正四面体，其极限物体的表面面积是无限的吗？它所包围的空间具有有限体积吗？

下面列举的是一些有用的参考资料：《数学和想象》，343 页至 356 页，爱德华·卡斯纳和詹姆斯·纽曼著；《雪花曲线》，布鲁斯·W·金著，载于《数学教师》杂志，第 57 卷，1964 年 4 月号，219 页—222 页；《范·科克曲线的推广》，乔尔·E·史尼德尔著，载于《数学杂志》第 38 卷，1965 年 5 月号，144 页—147 页。

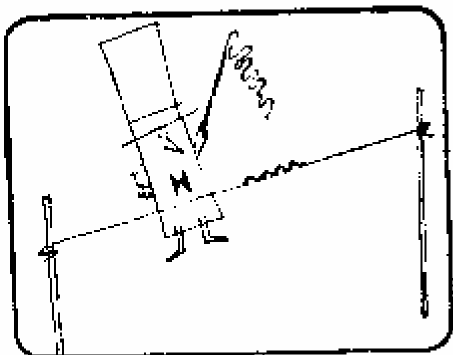
12 · 未知的宇宙



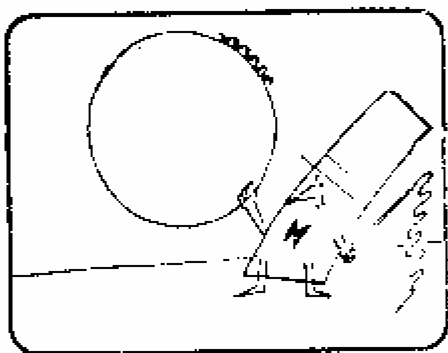
M：如果一个宇宙飞船发射出去以后始终沿着一条直线飞行，它将离开地球越来越远吗？爱因斯坦认为，未必如此，它说不定会回到地球上来！



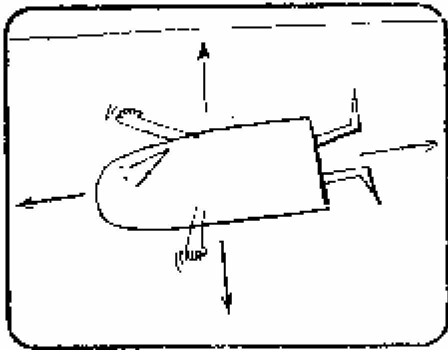
M：为弄清爱因斯坦这一论点让我们者一看这个可怜的“点世界”里的居民。他只生活在一个点里，他的宇宙没有维数。



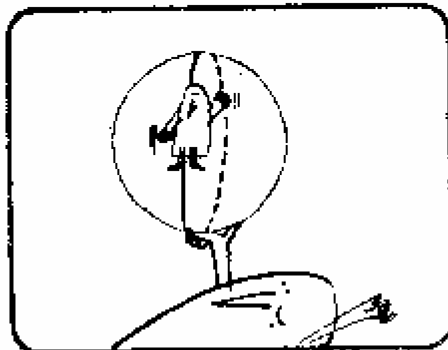
M：“线世界”里的居民生活在维数为 1 的线上，这正象爬在绳子上的蠕虫一样。如果绳子是无限长的，那么蠕虫可以朝着线的任意一端永远爬下去。



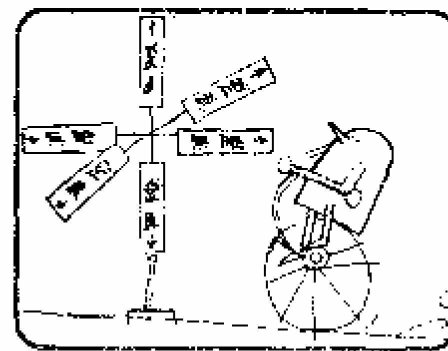
M：但是，如果绳子象圆周那样是封闭的，它就成为一个无端点的线，但它的长度是有限的，不管蠕虫在绳上向那个方向爬，它总要回到它原来的出发点。



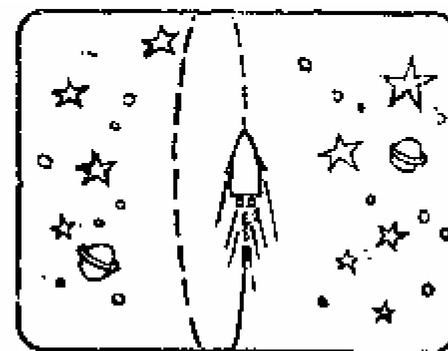
M："面世界"里的居民住在二维空间的面上。如果他的宇宙是一个无限的平面，他可以沿着此平面上的任何方向永远走下去。



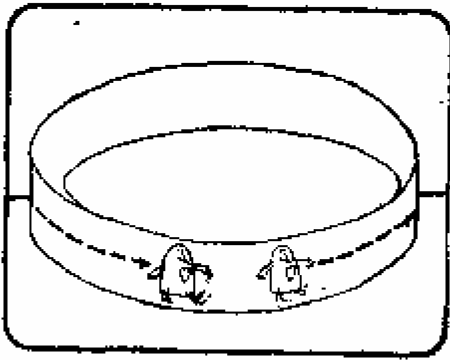
M：如果这个面是象球面那样的封闭曲面，它就成为一个有限的、无边界的曲面了。不管这个世界的居民沿着此曲面上哪个方向走，只要走的路线是直的，他还会回到原来出发的点上。



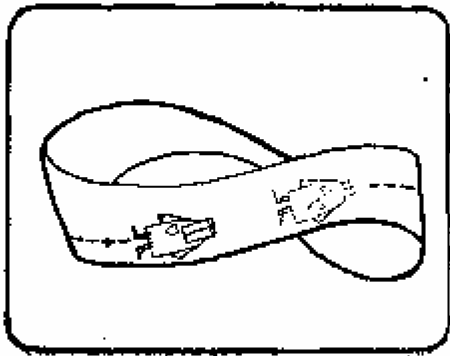
M：你和我都同是"体世界"里的居民，我们生活在三维空间里。也许，它在所有各个方向上都是无限的。



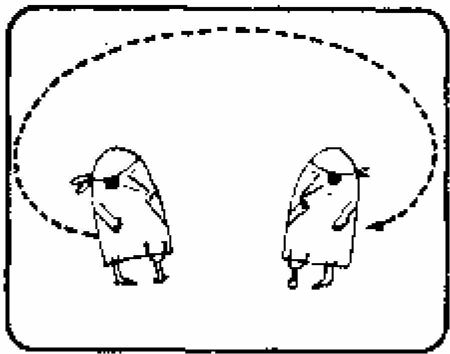
M：但也有可能象爱因斯坦所想象的那样，我们的"体世界"在从更高维的空间里来看它时却是弯曲的，构成一个有限的、但却无边界的宇宙。一艘宇宙飞船在这个宇宙里沿总最直的线路飞行将必然会回到它的出发点。



M：二维世界的居民在球面上绕圈运行，这就好象在一个没有扭曲的闭合带子上运行一样。如果他的心脏处在身体的某一侧，那它将永远处在同一侧。



M：但是如果他绕着缪毕乌斯带运行，奇怪的事情就发生了。带上的扭曲部分使它翻个筋斗，他回到原位置时，心脏已移到身体的另一侧！



M：如果我们所处的三维空间是封闭的，它当然也可能象缪毕乌斯带那样扭曲。这时，如果一个宇宙飞行家在这样的闭空间里环行一周，他回来时已是一个反向的人！

天文学家迄今还不知道我们所处的宇宙空间是开放的，还是象爱因斯坦所猜想的那样是封闭的，这完全依赖于在我们的宇宙中倒底有多少物质。按照广义相对论的理论，物质在空间里的存在会导致空间的"弯曲"，且当物质数量增加时，空间曲率也成比例地增加。今天，大多数的宇宙学家认为：宇宙中物质的数量还不足以产生使空间封闭的那么大的曲率。但这个问题还没有最后解决，因为宇宙中物质的密度现在还不知道。要想详细了解这个问题，请看任何一本相对论成宇宙学方面的通俗书籍。

现在还没有证据证明我们的宇宙空间象缪毕乌斯带那样是扭曲的。但是宇宙学家总是喜欢想象出宇宙的各种不同模型。在有些模型中，空间是扭曲的。在向学生说明二维世界的居民绕缪毕乌斯带一周如何被"镜象翻转"了的时候，很重要的一点就是要认识到这个带子的厚度为零。缪毕乌斯带的纸制模型实际上是个立体，因为它有厚度。我们必须认定：真正的缪毕乌斯曲面是没有厚度的。

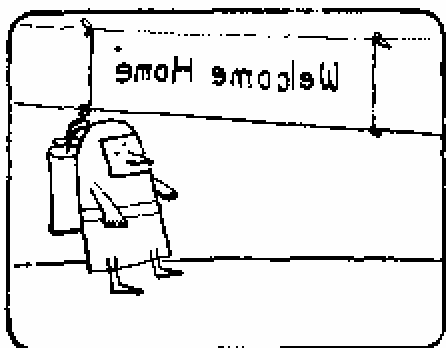
画在缪毕乌斯带上的图形就象用墨水在纸上画图形且墨水已渗透到纸的另一面那样，图形是存在于纸的两面上的，而不仅仅是在一面上。图形已"嵌入"

到曲面里。当图形绕缪毕乌斯带运行一周后回到出发位置时，就被翻转了。当然如果绕着带子再运行一圈又使它恢复到原来的样子。同理，宇宙航行家在一个扭曲的宇宙旅行一圈，他就被镜象翻转了，如果再进行第二次旅行，他又被矫正过来。

如果学生们对缪毕乌斯带的奇妙性质感兴趣，他们一定愿意研究另外两个具有同样奇妙性质的曲面；克莱因瓶和射影平面，它们和缪毕乌斯带一样都是单面的，与其不同的是它们没有边界，它们象球面那样是封闭的。克莱因瓶与缪毕乌斯带有密切的关系，一个克莱因瓶可切成两半，得到两个互为镜象的缪毕乌斯带。一个"嵌进"克莱因瓶或射影平面的二维世界的居民在曲面上行走一圈以后就会被"镜象翻转"了（参看《科学美国人数学游戏第六集》一书的第二章）。

有些学生会喜欢读 H.G. 威尔斯所写的《平面人的故事》一书。这是一本最有名的科学幻想小说，写的是一个人在外部空间里被翻转了，归来时，他的心脏已经在身体的右侧（这个故事收在威尔斯的《科学幻想故事二十八则》一书中）。

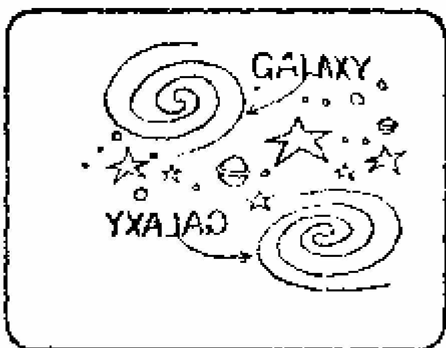
13 · 反物质



M：被翻转的宇航家在返回后，会认为自己很正常，而是觉得他周围的世界都被“镜面翻转”了。他会觉得书写的顺序左右颠倒，汽车是在道路的相反一侧运行。



M：大多数物理学家认为这种被镜面翻转的物质是“反物质”，当它与普通物质接触时就会被消灭。如果真是这样的话，我们的宇航家将永远不会再回到地球上来了，他那被翻转的宇宙飞船一接触到地球大气就会立刻爆炸！



M：最近所发现的证据倾向于这样的理论，即我们的宇宙空间不是封闭的而是无限的。但是还有许多重大问题没有解决：我们的宇宙里存在由反物质构成的星系吗？在我们的宇宙之外还有巨大的由反物质构成的宇宙吗？现在的宇宙学家还只能对这些问题的答案进行猜测。

每种基本粒子都有相应的反粒子，它与原来的粒子相比，只是所带的电荷（如果它带电荷的话）和其他量子数相反，其余构造完全相同。正因为带的电荷相反，所以它们的一些性质也完全相反。许多物理学家认为反粒子是由原来粒子的内部结构被“镜面倒转”以后得到的。由反粒子构成的物质叫反物质。

当粒子和反粒子相遇时，它们就会同归于尽。我们的银河系完全是由普通物质构成的，所以一旦制造出一个反粒子，不管是在实验室里还是在星球内部，在它遇到一个粒子并湮灭以前只能存在一微秒。

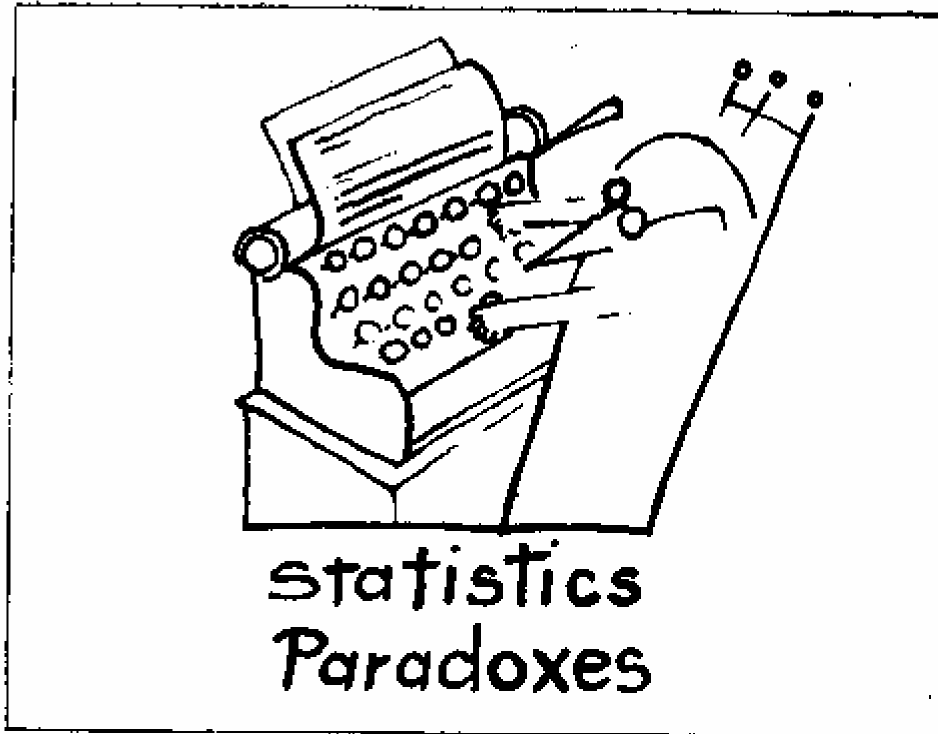
大多数宇宙学家都认为，整个宇宙是由普通物质构成的，少数人坚持，在宇宙里有可能存在由反物质构成的星系，由这样的星系发出的光与由普通物质构成的星系发出的光是没有区别的，所以要知道它们的存在是很困难的。许多宇宙学

家还这样推测：在开天辟地的那个时刻，物质和反物质就分离开，构成了两个宇宙，一个称做“宇宙”，另一个则是“反宇宙”，它们互相排斥并且以很大的速度互相远离。

这种认为宇宙分成两部分，其中一部分是另一部分镜象的想法为许多科学幻想小说所引用，并且出现在弗拉基米尔·纳巴科夫的浪漫小说《阿达》中。

想深入了解反物质和其它有关问题的学生，可以参考下列书籍：杨振宁著《基本粒子》。

第五章 统计学悖论



统计学是关于数量信息的收集、整理和分析的学科，它在今天高度复杂的世界上变得越来越重要了。一般市民在很多方面，从经济状况到判断一种商标的牙膏好坏，都会受到大量数字的困扰。除非他具有一定的统计学知识，他才能作出明智的决定。如果他在大学学物理，或社会科学、施政学、商业或政治、他会发现统计学是多么重要。在另外一些领域，如保险、公共卫生及广告等，统计学也起着积极的作用。

这里不准备介绍统计学，更不是关于统计学基本知识的教材。只是指出一些典型的统计学悖论，我们选择最有趣味的、旨在引起学生学习更多基本知识的愿望。这章想让读者浏览统计学中那色彩斑烂的图景，并希望由此激发学生系统研究这一学科的兴致。

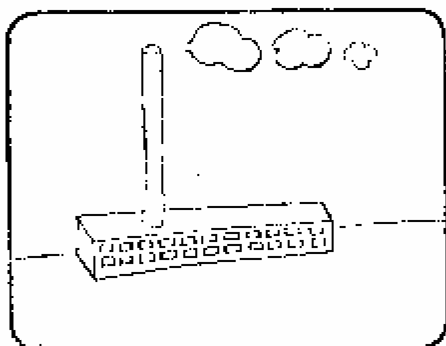
第一个故事介绍了统计学的三种度量：平均值、中值和众数。接着是一个逗人的、外国情调的误用数据的例子。它们让人们察觉到统计学数据有很多陷阱，并激发起学生想要学会避开它们的愿望。

面对当今人们对占星术和神灵学的兴趣激增的局面，几乎没有学生知道，正因为他们对统计学花招缺乏经验而使他们轻易地受了蒙骗。这一章的中间部分介绍的悖论（小世界悖论、生日悴论、数字和字母的随机序列的特征、以及随机事件的成群趋势）旨在阐明，某些意外的巧合从统计学来看却是毫不足怪的事。后面还介绍了一些扑克牌把戏，在你第一次试玩这些把戏时，你也许不相信它是以数学原理为依据的。

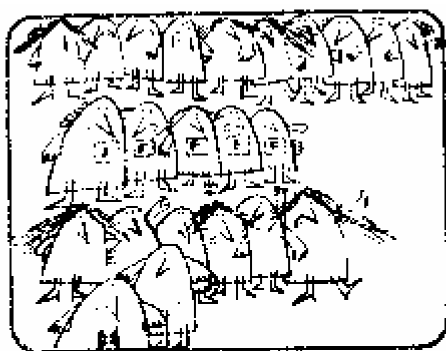
在很多强烈违反直觉的，研究对策论而出现的论题中，选举悖论是最著名的。对策论是数学的一个新分支，研究如何以统计资料为基础做出合理的决策。这里关于罗尼哈特小姐为找到一位满意的风流小伙的故事是不太为人所知的新悖论。

后面的两个是现在科学的哲学家一直争论不休的最著名的悖论：恼人的乌鸦悖论和称为“蓝绿”的奇怪特性。它们点明了统计学在评价科学理论中的重要作用。

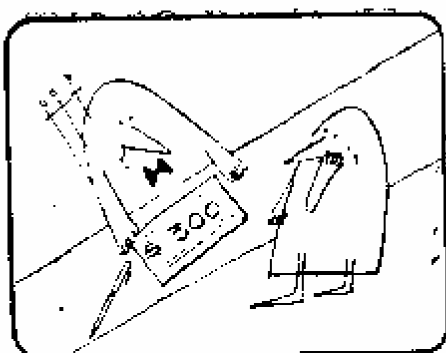
1·骗人的“平均数”



M：吉斯莫先生有一个小工厂，生产超级小玩意儿。

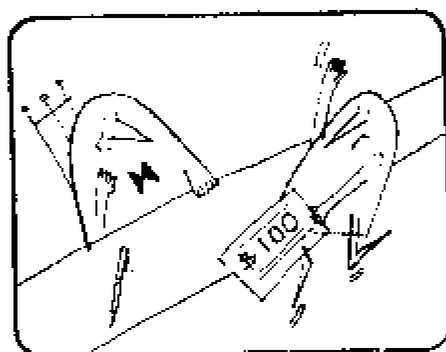


M：管理人员由吉斯莫先生、他的弟弟、六个亲戚组成。工作人员由 5 个领工和 10 个工人组成。工厂经营得很顺利，现在需要一个新工人。



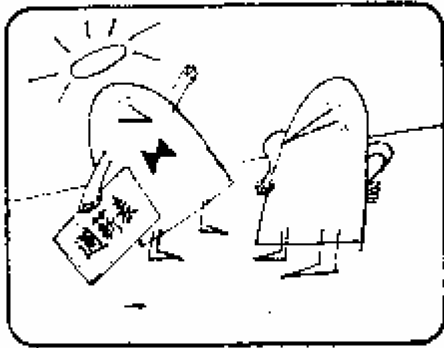
M：现在吉斯莫先生正在接见萨姆，谈工作问题。

吉斯莫：我们这里报酬不错。平均薪金是每周 300 元。你在学徒期间每周得 75 元，不过很快就可以加工资。



M：萨姆工作了几天之后，要求见厂长。

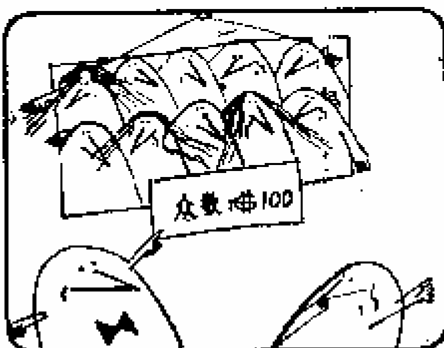
萨姆；你欺骗我！我已经找其他工人核对过了，没有一个人的工资超过每周 100 元。平均工资怎么可能是一周 300 元呢？



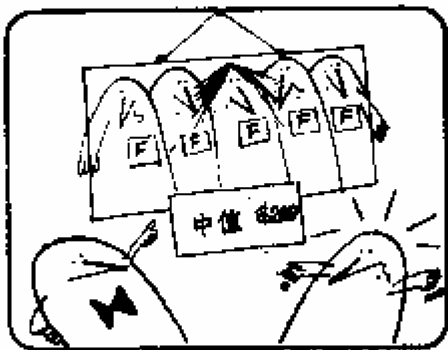
吉斯莫：啊，萨姆，不要激动。平均工资是 300 元。我要向你证明这一点。

吉斯莫：这是我每周付出的酬金。我得 2400 元，我弟弟得 1000 元，我的六个亲戚每人得 250 元，五个领工每人得 200 元，10 个工人每人 100 元。总共是每周 6900 元，付给 23 个人，对吧？

萨姆：对，对，对！你是对的，平均工资是每周 300 元。可你还是蒙骗了我。

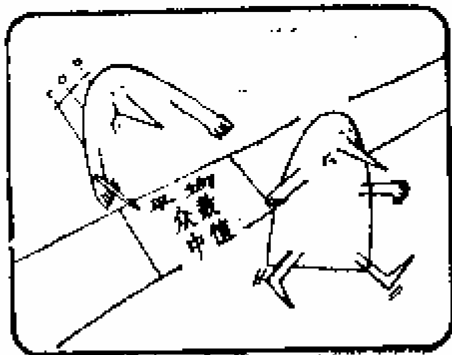


吉斯莫；我不同意！你实在是不明白。我已经把工资列了个表，并告诉了你，工资的中位数是 200 元，可这不是平均工资，而是中等工资。



萨姆：每周 100 元又是怎么回事呢？

吉斯莫：那称为众数，是大多数人挣的工资。



吉斯莫：老弟，你的问题是出在你不懂平均数、中位数和众数之间的区别。

萨姆：好，现在我可懂了。我……我辞职！

统计学的解说可能是极富逆论性的，常常被完全误解。关于吉斯莫工厂的故事揭示出，误解产生的一个共同根源是不了解平均数、中位数（中值）和众数之间的差别。

“平均”这个词往往是“算术平均值”的简称。这是一个很有用的统计学的度量指标。然而，如果有少数几个很大的数，如吉斯莫的工厂中少数高薪者，“平均”工资就会给人错误的印象。

读者还可考虑一些类似的引起误解的例子。譬如，报纸上报道有个人在一条河中淹死了，这条河的平均深度仅只 2 尺。这不使人吃惊吗？不！你要知道，这个人是在一个 10 多尺深的陷坑处沉下去的。

一个公司可能报告说它的策略是由股东们民主制订的，因为它的 50 个股东共有 600 张选票，平均每人 12 票。可是，如果其中 45 个股东每人只有 4 票，而另外 5 人每人有 84 张选票，平均数确实是每人 12 票，可是只有那 5 个人才完全控制了这个公司。

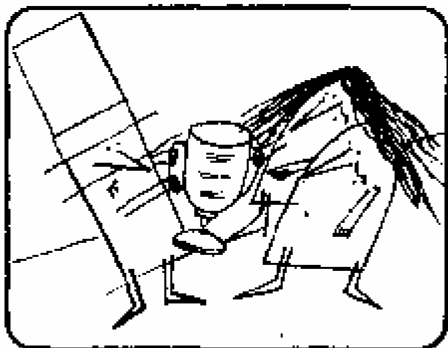
还有一个例子：为了吸引零售商到一个城里来，商会吹嘘道：这个城市每个国民的平均收入非常高。大多数人看到这个就以为这个城的大多数市民都属于高收入阶层。可是，如果有一个亿万富翁恰好住在该城，其他人就可能都是低收入的，而平均个人收入却仍然很高。

统计学的报告有时甚至更加使人糊涂，这因为有时“平均”这个词不是指算术平均值，而是指中值或众数。中值（中位数）是按大小顺序排列的数值表中中心位置对应的数值。如果表中数值有奇数项，则中值就简单地是中间项的值。如果有偶数项，中值往往取中间两项的算术平均值。

中值对萨姆来说比算术平均值重要，但就是中值也使人对这个工厂的工资情况得出歪曲了的印象。萨姆反正要知道的是“众数”——表中段常出现的数。在这里，众数是发给工厂中数目最多的人的工资数。有时候这叫做典型情况，因为它比其他任何情况出现次数都多。在上面最后一个例子中，那个城里一个典型家庭代表收入为众数的家庭，它也许很穷，但由于有少数亿万富翁，这个城的平均收

入也还非常高。

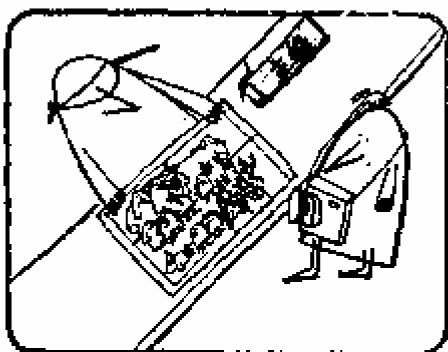
2·某年的母亲英雄



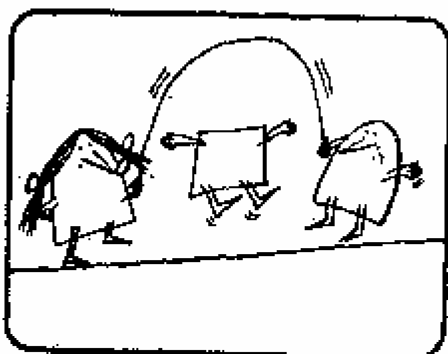
M：这一年年底，萨姆的妻子接受了这个城的市长的奖赏。她被命名为这一年的母亲英雄。



M：地方报纸刊登了萨姆，他的妻子和他们的 13 个孩子的照片。



M：主编对这张照片很满意。
主编：干得好，巴斯康。我有一个新任务，你给我弄一张这个城里平均大小的家庭的照片来。



M：巴斯康无法做到这一点。为什么？因为这个城里没有一个家庭具有平均的人数。算出的平均数是一家有两个半孩子。

关于“平均”的又一个错误概念就是平均的实际范例必然存在。看了这一段故

事之后，我们就知道不存在平均有两个半孩子的家庭，现在读者不难想象出平均数不存在的其他例子。

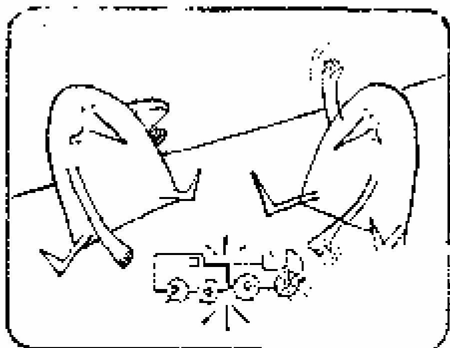
这里的一些问题有助于学生加深他们对算术平均值、中位数和众数的理解。

1）如果主编要一张“典型家庭”的照片，根据众数的意义，摄影记者是否总能找到这样的家庭？（能，典型情况显然是存在的）。

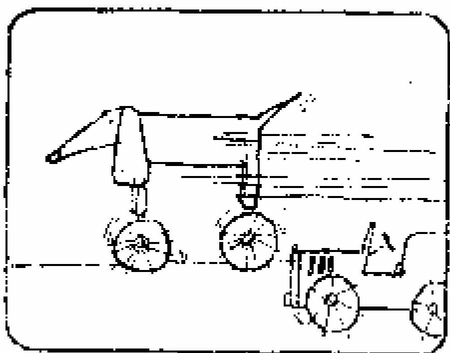
2）有没有可能众数多于 1 个？例如两个孩子的家庭和 3 个孩子的家庭能不能都是众数的实例？（可以，如果这个城里有 1476 家有两个孩子，还有 1476 家有 3 个孩子，而所有其余的家庭的孩子数要么比它们多，要么比它们少，上述两种家庭是最多数的，那么，这个城市就有两种典型家庭，每—个都是正规的众数）。

3）如果主编想要—张中值家庭的照片，他是否总能得到？（常常可以得到，但不—定总是能得到。正如我们上而所见，如果这个城里有偶数个家庭，其居中的两个家庭孩子数目不等，这时中位就不一定是整数了）。

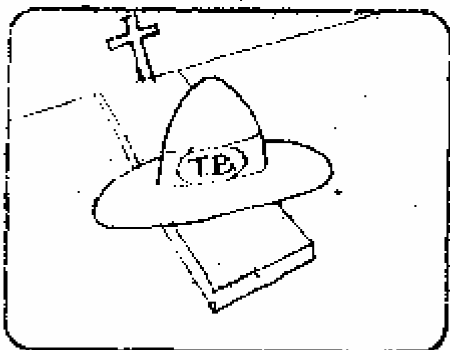
3·轻率的结论



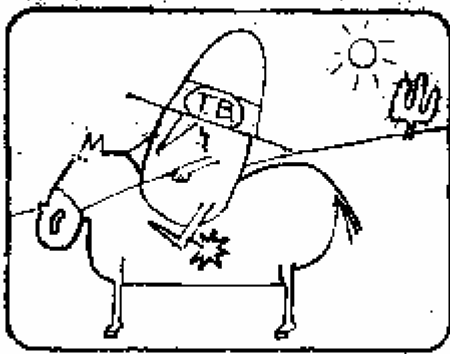
M：统计资料表明·大多数汽车事故出在中等速度的行驶中，极少的事故是出在大于 150 公里/小时的行驶速度上的。这是否就意味着高速行驶比较安全？



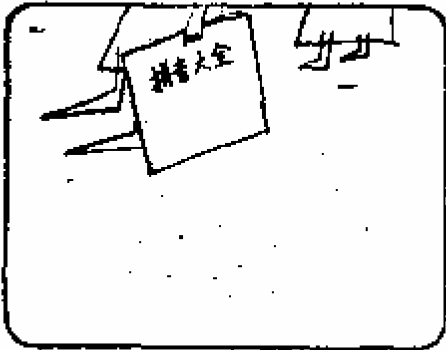
M：绝不是这样。统计关系往往不能表明因果关系。由于多数人是以中等速度开车，所以多数事故是出在中等速度的行驶中。



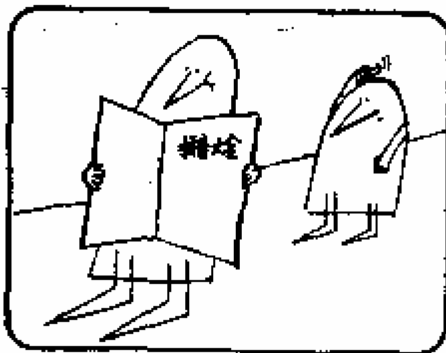
M：统计数字还表明，在亚利桑那州死于肺结核的人比其他州的人多。这是否就意味着亚利桑那州的气候容易生肺病？



M：正好相反。亚利桑那的气候对害肺病的人有好处，所以肺病患者纷纷前来，自然这就使这个州死于肺结核的平均数升高了。



M：有一个调查研究说脚大的孩子拼音比脚小的孩子好。这是否是说一个人脚的大小是他拼音能力的度量？



M：不是的。这个研究对象是一群年龄不等的孩子。它的结果实际上是因为年龄较大的孩子脚大些，他们当然比年幼的男子拼得好些。

这三个片断着重说明了，在你听到一种统计关系时，切勿轻率地对其因果关系作结论。下面再举几个例子；

1）常常听说，汽车事故多数发生在离家不远的地方，这是否就意味着在离家很远的公路上行车要比在城里安全些呢？不是，统计只不过反映了人们往往是在离家不远的地方开车，而很少在远处的公路上开车。

2）有一项研究表明其一个国家的人民，喝牛奶和死于癌症的比例都很高。这是否说明是牛奶引起癌症呢？不！这个国家老年人的比例也很高。由于癌症通常是年龄大的人易得，正是这个因素提高了这个国家癌症死亡者的比例。

3）一项研究表明在某个城市心力衰竭而死亡的人数和啤酒的消耗量都急剧升高。这是否表示喝啤酒会引起心脏病发作？不！两种情况的增加是人口迅速增加的结果。若按同样的理由，心脏病发作还可见归咎于上百个其他因素，如咖啡消耗量增加，嚼口香糖的人增多，玩桥牌更加盛行，更多的人看电视，等等。

4）一项研究显示出，欧洲某个城市的人口大量增加，同时鹳鸟窝也大量增

加。这是否就支持了鹳鸟送来婴儿这一信念？（欧洲有一种说法，称婴儿是鹳鸟送来的，常用鹳鸟来临表示婴儿降生）。不！它反映的事实是这个城市内的房屋增多，鹳鸟就有更多地盘来筑窝了。

5）最近一项研究显示，大多数杰出的数学家是大儿子。这是否意味着头生子比以后生的儿子数学才能高些？不！这只是简单地反映出一个事实：大多数的儿子是头生子。

这可以引起一些有趣的课堂活动：

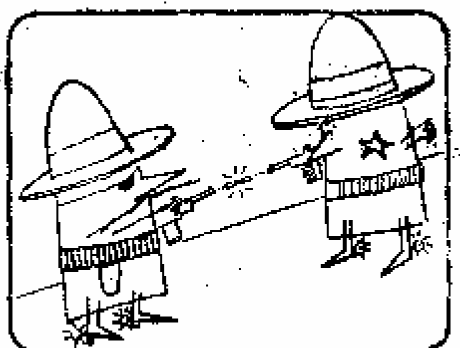
1）学生们是否做过一项调查？看他们年级的男孩子是否多一半是大儿子？或者对女孩子作了调查，是否多一半是大女儿？

2）请你们考虑 100 个有两个孩子的家庭的情况。男孩（或女孩）是大儿子（或大女儿）的比例是多少？（答案：3/4）（注意：一儿一女时，儿子和女儿都算老大）。当 100 个家庭，每家有三个孩子时，计算大儿子（或大女儿）的比例。（回答 7/12）。不用说，在只有一个孩子的家庭，这个孩子总是老大。

同一性别的孩子中，老大的比例显然随家庭中孩子的多少而变，不过对多数家庭而言，这个比例都大于 1/2。

上述例子也许能启发大家找出其他一些统计论述的实例，证明统计学论述在联系到因果关系时很容易建成误解。现代的广告，尤其是很多电视的商业广告正是以这种统计误解为其根基的。

4·小世界的悖论



M：近来很多人相信巧合是由星星或别的神秘力量引起的。



M：譬如说，有两个互不相识的的人坐同一架飞机。二人对话：

甲：这么说，你是从波士顿来的啰！我的老朋友露茜·琼斯是那儿的律师。

乙：这个世界是多么小啊！她是我妻子最好的朋友！

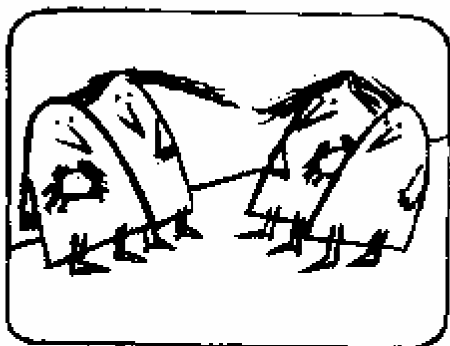
M：这是不大可能的巧合吗？统计学家已经证明并非如此。

很多人在碰到一位陌生人，尤其是在远离家乡的地方碰到一个生人，而发现他与自己有一个共同的朋友时，他们都会成到非常惊讶。在麻省理工学院，由伊西尔领导的一组社会科学家对这个"小世界悖论"作了研究。他们发现，如果在美国随便任选两个人，平均每个人认识大约 1000 个人。这时，这两个人彼此认识的概率大约是 1/100000，而他们有一个共同的朋友的概率却急剧升高到 1/100。而他们可由一连串熟人居间联系（如上面例举的二人）的概率实际上高于百分之九十九。换言之，如果布朗和史密斯是在美国任意选出的两个人，上面的结论就表示：一个认识布朗的人，几乎肯定认识一个史密斯熟识的人。

最近心理学家斯坦利·米尔格拉姆用一种方法逼近小世界的问题，学生们很容易试一试它。他任意地选择了一组"发信人"，给每一个人一份文件，让他发给一个"收信者"，这个收信者是他不认识的，而且住在这个国家另外一个很远的地方。做法是过他把信寄给他的一个朋友（是一个他没有深交的朋友），也许他很可能认识那个收信者，这个朋友再接着发信给另一朋友，如此下去，直到将文件寄到认识收信者的某人为止，米尔格拉姆发现，在文件达到收信者手中之前，中间联系人的数目从 2 到 10 不等，其中位数是 5。当你问别人这到底需要多少中间联系人时，他们多数猜想大约要 100 人。

米尔格拉姆的研究说明了人与人之间由一个彼此为朋友的网络联结得多么紧密。由于这一结果的启示，两个陌生人在离家很远的地方相遇而有着共同的熟人就不足为怪了。这种关系网络还可解释很多其他不寻常的统计学现象，例如流言蜚语和耸人听闻的消息不胫而走，新的低级趣味的笑话很快四处蔓延，同样地，一条可靠的情报也在料想不到的短时间里就为很多人知道了。

5 · 你属于哪一宫



M：这四个人第一次见面。如果他们四个至少有两个人属于黄道十二宫中的同一宫，这岂不是非常巧的偶合吗？[*]你也许以为，这是非计凑巧的事，而实际上这种巧合在十次中就会大约发生四次。

假定每个人都以相同的概率出生在十二宫之一，那么四个人中至少有两个人属于同一宫的概率是多少？

让我们用一副牌来模拟这种情况。先抽掉四张 K。这副牌现在就是四种花色，每种 12 张。我们用一种花色代表一个人，每个点数代表一个宫。如果我们从每一种花色中任抽一张牌，四张牌里至少两张点数一样的概率是多少？很明显，这就和四个陌生人中至少两人有同样的黄道宫的概率一样。

解决这个问题最简单的方法是先算出没有两张牌的点数相同的概率，再把它从 1 中减去，就得到我们所要的概率。

如果我们考虑两个花色，譬如说黑桃和红心，由于一张红心和十二张黑桃中的一张配对，只有一对是同点数的，故点数不同的概率是 11/12。而一张梅花与黑桃、红心这两张牌的点数都不同的概率就是 10/12，一张方块又不同于这其余三张脾的概率是 9/12。这三个因子的乘积就是四张牌的点数彼此都不相同的概率，结果是 55/96。用 1 减去这个数得到 41/96，大约是 4/10，它也既是四个人中至少有两个是属于同一宫的概率。这差不多是 1/2，因此这种巧合毫不足怪。

这肯定是著名的生日悖论的翻版。如果有 23 个人无意中碰到一起，至少有两个人的生日是同一天的概率稍小于 1/2。其计算过程类似于上面的黄道宫的算法，不过这里相乘的有 22 个因子：

$$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\cdots\cdots\frac{343}{365}$$

乘积是 0.5073^{+}，或者说稍大于 1/2（所求概率则稍小于 1/2）。用小型计算器计算这个数是一个再好不过的练习了。如果人数多于 23 个，则生日相同的概率会迅速升高。如果你们班的同学有 40 人，那么至少有两人生日一样的概率是 7/10。如果有 100 个学生，则至少有两人生日相同的概率比之谁的生日不一样的概率是 3000000 比 1。

建议作一些实际练习：

1）美国有几位总统的生日相同？有几个逝世的日期—样？这些结果与理论预计比较如何？（詹姆斯·波尔克和沃伦·哈丁的生日都是 11 月 2 号。托马斯·杰斐逊、约翰·亚当期和詹姆斯·门罗都逝于 7 月 4 日）。

2）一组人，若要求其中至少有两人生日在同一个月的概率大于 1/2，这组人的人数最少是几？（回答是 5。此时有两人生在同一个月的概率是 89/144，大约是 0.62）。

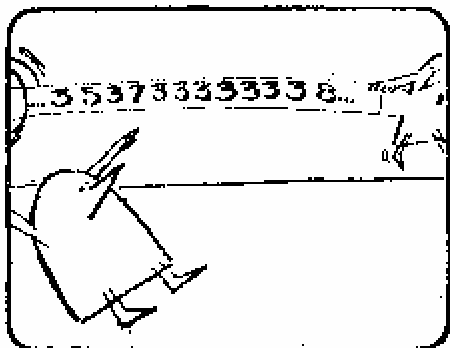
3）一组人，若要求至少有两人生于同一个星期数的概率大于1/2，那么这个组最少要由几个人？（回答：4，此时相应的概率是223/343，大约是0.65）。

4）若要求你所遇到的人中至少有一人和你的生日在同一天的概率大于1/2，你最少要遇到多少人？（回答：253。不是183，如果每个人只有一个生日而不会还有一个的话，就是如此。）

---

[*] 西方占星学将天体运行带以黄道为中心划分为十二宫：白羊宫、金牛宫、双子宫、巨蟹宫、狮子宫、处女宫、天平宫、天蝎宫、半人马宫、摩羯宫、宝瓶宫和双鱼宫，认为每个人根据出生而属于其中某一宫。在中国，我们可以代之以每个人的属相，恰好也有十二个。——译者

6·圆周率 π 中的数字结构

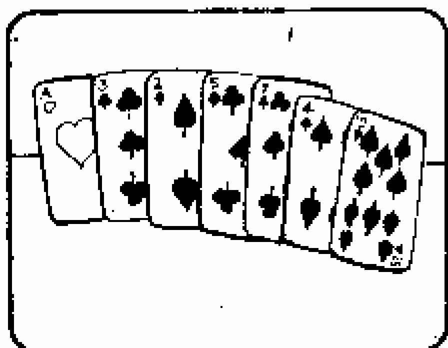


M：π 的数字排列是无规则的，可是让我们看看从第 710154 个数以下的数字是怎样排列的：一连串排有 7 个 3。

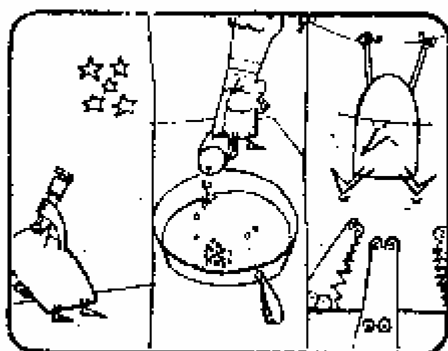
π 的数字从它是随机产生的这一点来讲，它不是没有规律的，可是从它的数字排列规律是“无章可循”这一点来讲，又是没有规律的。数学家对 π 的小数位不断增加作了很多试验，看是有什么“规律性”，可是毫无结果。π 的小数位数字就像一个旋转圆盘可以旋到 0 至 9 任何一个数字那样毫无规律。

实际上，像这样一串 7 个 3 的数字在 π 中出现机会是很多的。但由于从某—位开始，出现一串 7 个 3 的概率是 10^{-7}，因此当 π 中从第 710161 位以后出现 7 个 3 时，乍一看是很觉惊奇的。可是，如果我们的注意力放在由 7 个数字组成的不寻常排列的话，就会发现这种特定排列的概率变得相当高。比如说，我们可以见到象 4444444 或 8888888，或 1212121，或 1234567，或 7654321，或其他引人吃惊的这类数字排列。由于我们预先并不知道下一次会出现什么样的 7 个数字组，所以猜一猜下一组数是什么是很有趣的。就像亚里斯多德曾经说过的，最不可能的事也是极可能的事。

7·错综的群体



M：就是在洗牌时也会出现巧合。比如，几乎总是有 6—7 张牌是同一颜色的。



M：恒星成群聚集称为星座，豌豆撒在桌面汇成小群。有一个古老的俗话说：“祸不单行”。

随机事件以各种不同形式“成群”出现是熟识的现象，已经有很多关于统计学上称为“成群理论”的书。π 中连续 7 个 3 就是随机成群的例子。如果你不断抛掷一枚硬币，或者老是旋转轮盘赌的圆盘，记下结果，你就会发现有时竟会一连串出现很长的同样结果。

密执安大学的一位工程师穆尔发现，有一个证明事件成群的惊人实验，你不妨试一试。穆尔因该实验使用了大量糖果，就称之为“糖果花纹”。这种糖果是一种制成球形的上了色冰糖、或球形彩色水果糖。取相当数量的红色球糖，相当数量的绿色球糖，将两种同样数量的糖放入玻璃瓶中。不断摇这个瓶子，直至两种色糖完全混合均匀为止。

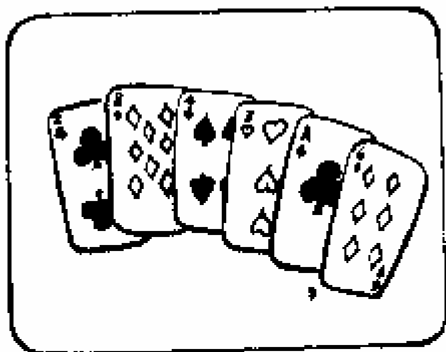
注视瓶子的一边。你大概估计会看到两种色糖已均匀打散了，可是你看到的图案都是不规则的，大片红糖图案中点缀着许多小群的绿糖，且二者总面积相等。图案是如此出人意料，甚至数学家在乍看到时也会相信，大概有某种静电效应使得一种颜色的球糖粘住另一领色球糖。实际上起作用的是偶然性。花纹是随机成群的正常结果。

如果你们不愿相信这一点，你们可以用一张制图纸产生出同样的花纹。画一个 20×20 的方格图。用红绿二色来填每一小格，方法是用抛掷硬币来选颜色。在 400 个小格都用颜色填满时，你将会看到类似上述糖果瓶边所出现的那类图案。

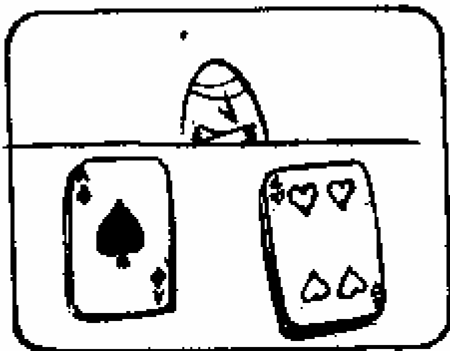
成群过程中往往有一些非数字的因素。如果小汽车在高速公路上随机地分布着，我们从直升飞机上往下看，就会觉得这些汽车是成群结队的，但是实际上成群的原因远不能用偶然性来解释，因为司机一般不愿意老按同样的速度开车，当前面有很长距离没有汽车时，他们加大马力快开起来。地图上城镇的位置，下雨

天接连不断，草地上三叶草、海蓬子等成块，除此以外还有很多其他成群事例都超过用偶然性可说明的程度。你可以试一试找出其他成群例证来说明有些是纯属偶然的原因，有些则是非偶然的因素造成的集群。

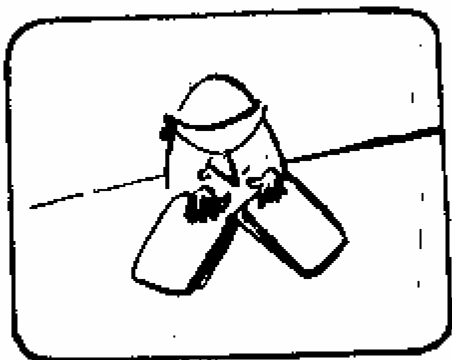
8 · 奇异的纸牌把戏



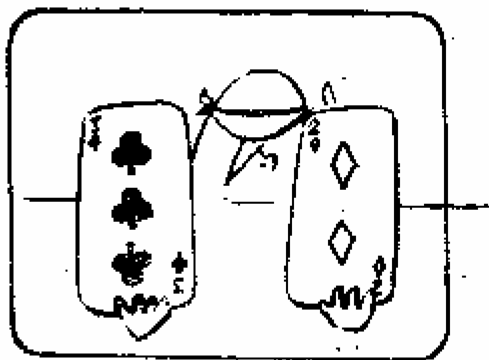
M：这里有一个与成群理论有关的惊人的纸牌悖论。先拿一副扑克牌，使它黑红相间。



M：把这副牌分成两叠，要让每叠牌的最底下那张的颜色互不相同。



M：现在将两叠牌洗到一起。



M：从这叠洗过一次的牌上部一对一对地拿牌。不管你原先是怎样洗牌的，你拿的每对牌都是一红一黑！

这个不寻常的纸牌把戏是一个实例，说明一种潜在的数学结构会怎样进入随机集群之中，并产生看上去似乎神秘的结果。魔术师都知道这是吉尔布雷德原理，是数学家兼业余魔术师诺尔曼·吉尔布雷德在 1958 年发现的，自那以后根据这一原理就引出了几百种巧妙的扑克把戏。

下面是对这一原理的作用机制的一个非正式的归纳证明。这副黑红相间的牌分成两叠后须两张底牌一黑一红。在洗这两叠牌时，第一张牌离开拇指落下贴在桌面后，左右手中两叠底牌就是一色的了，这两张牌都与已落下的那张牌颜色不同。往后无论这两张底牌落下哪张都与桌上那张构成颜色不同的一对。现在手中的牌又与还未落下任何一张牌时的情况一样。剩下两叠牌的底牌颜色不同。不管哪张牌落下，手中剩下的两张底牌均与之不同色，故接着落下的第二对牌也必然是颜色不同的。依此类推可知余下的牌将反复出现上述现象。这是向学生介绍用数学归纳法证明问题的技巧的极好方法。

你可以把这套把戏在你朋友面前玩一玩，不过你要事先把扑克牌弄成红黑相间再开始。让一位朋友把这副扑克从上面一张一张往一边拿，使拿过来的叠成一叠，数到 26 张时便停止（这样做就可以保证底下的两张牌颜色不同）。现在让他把两叠牌洗到一起。你把“洗过”的这叠牌放到桌子下面，使谁也看不到牌，包括你也看不到牌。你这时就可以说你能用手指摸出牌的颜色来，并且把牌一对一对地亮出，使每对牌都是一红一黑。自然，你只不过是从这副牌的上面一对—对取牌就行了。

学生们一定会对这套把戏感到好奇，急于想知道这个原理是否能推广到产生其他把戏。可以让他们试试下面的做法。把四种花色的牌按一适当顺序排好，例如，黑桃、红心、梅花、方块；黑桃、红心、梅花、方块；黑桃、红心、梅花、方块；等等。从上面开始拿牌，拿出的叠成一叠，到大约 26 张为止（是否严格 26 张没关系！）。这种拿法正好使黑桃、红心、梅花、方块的次序颠倒。现将两叠牌洗到一起，然后从这叠牌上面每四张一取，则每四张牌的花色必然互不相同！

第二个实验，你可以先将一副牌分成四叠，每叠的次序是 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K，而不管它们花色是否相同。像上面几次一样拿牌和洗牌。从上面取 13 张牌，每一手则仍然是从 A、2、3 一直到 J、Q、K 所有点数都有的牌。

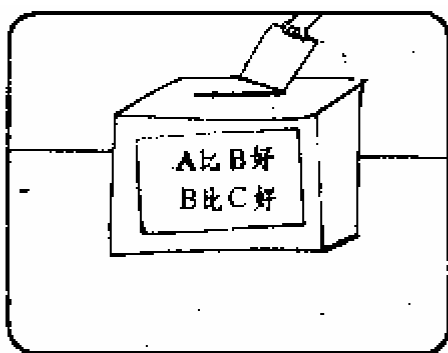
最后一个实验，用两副牌，使一副牌的顺序与另一副完全相同，再将其中一副放在另一副上面，然后从上面一张一张地取牌，每取一张就放在前一张上面，直到大约 52 张时为止。把两副牌洗到—起，然后将这 104 张牌严格分成两份。

这时每一份正好是一副牌。

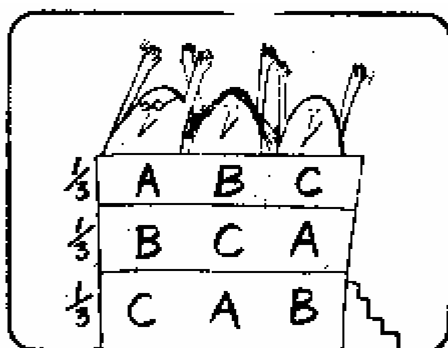
9．选举悖论



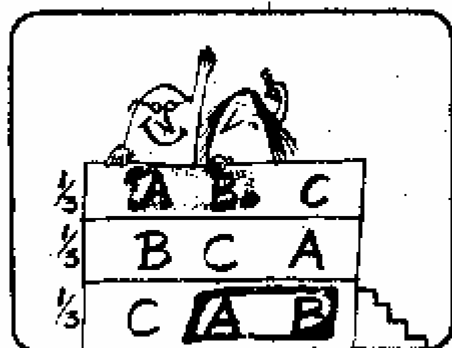
M：假定有三个人—阿贝尔、伯恩斯和克拉克竞选总统。



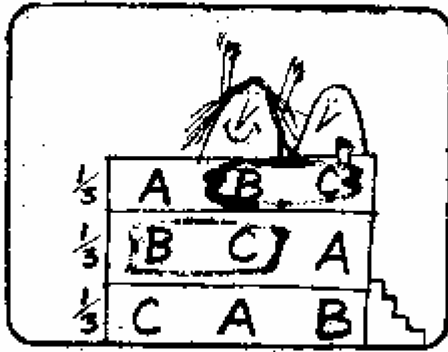
M：民意测验表明，选举人中有 2/3 愿意选 A 不愿选 B，有 2/3 愿选 B 不愿选 C。是否愿选 A 不愿选 C 的最多？



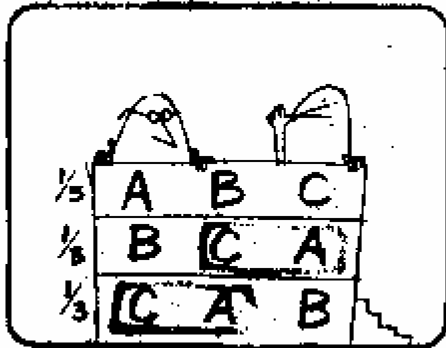
M：不一定！如果选举人像图中那样排候选人，就会引起一个惊人的逆论。我们让候选人来说明这一点。



甲（男）：我是阿贝尔。选举人中有 2/3 喜欢我，不喜欢伯恩斯。



乙（女）：我是伯恩斯小姐。2/3 的选举人喜欢我，超过克拉克。



丙（男）：我是克拉克。2/3 的选举人欢迎我超过阿贝尔！

这个逆论可追溯到 18 世纪，它是一个非传递关系的典型，这种关系是在人们作两两对比选择时可能产生的。学生们也许已经很熟悉传递关系的概念。它适用于诸如“高于”、“大于”、“小于”、“等于”、“先于”、“重于”等关系。一般讲，如果有一个关系 R 使得 xRy（即 x 对 y 是 R 关系）、yRz 成立时，则 xRz 成立，这时 R 就是可传递关系。

选举悖论使人迷惑，是因为我们以为“好恶”关系总是可传递的，如果某人认为 A 比 B 好，B 此 C 好，我们自然就以为他觉得 A 比 C 好。这条悖论说明事实并不总是如此。多数选举人选 A 优于 B，多数选举人选 B 优于 C，还是多数选举人选 C 优于 A。这种情况是不可传递的！

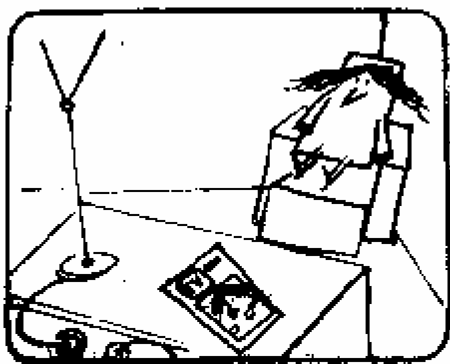
这条悖论有时称为阿洛悖论，肯尼思·阿洛曾根据这条悖论和其他逻辑理由证明了，一个十全十美的民主选举系统在原则上是不可能实现的，他因此而分享了 1972 年诺贝尔经济学奖金。

假定有三个对象，而且具有三种可以比较的指数，当我们将它们两两比较按各指标排列，再从中选择一个时，就可能出现上述矛盾。假定 A、B、C 是向一位姑娘求婚的三个人。上面图中那种排列情况可解释为这个姑娘就三个方面比较这三个人优劣的次序，例如第一列是智慧，第二列是容貌，第三列是收入。如果两两相此，这个可怜的姑娘就发现，她觉得 A 比 B 好，B 比 C 好，C 又比 A 好！

数学家保罗·哈尔莫斯提出用 A、B、C 代表苹果酱馅饼（一种类似馅饼的果饼）、浆果酱馅饼和樱桃酱馅饼。一个饭店每次只供给两种。上面图中 A、B、C 的三种排列表示一个顾客从饼的味道、新鲜程度和大小对三种饼的排列次序。对这位顾客而言，认为苹果比浆果好、浆果比樱桃好、樱桃比苹果好，这就是最完美的理解。

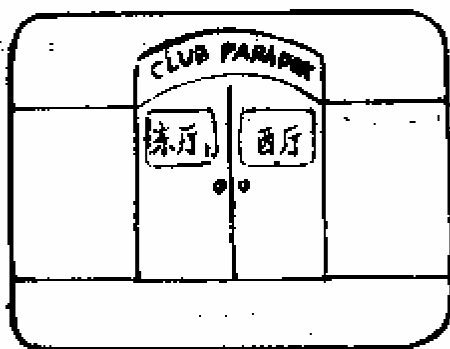
这个悖论还可以在产品检验中出现，一个统计学家也许发现，有 2/3 的美国家庭妇女喜好润肤霜 A 超过 B，2/3 的喜好 B 超过 C。化学公司得知这一结果后也许就将润肤霜 C 作为最不受欢迎的一种而降低产量，岂不知第三个统计可能会表明还有 2/3 的人喜欢 C 超过 A 呢。

10·罗尼哈特小姐找朋友

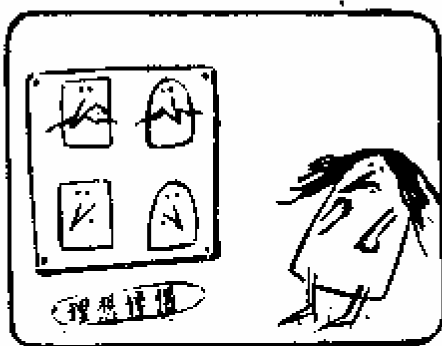


M：罗尼哈特小姐——一位统计员——独自在家中坐腻了。

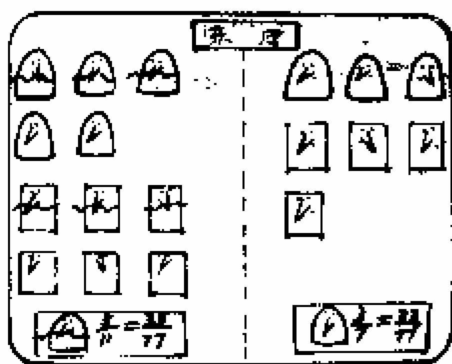
罗：但愿我能认识一个未婚的男子。我想要加入一个为单身人组织的小组。



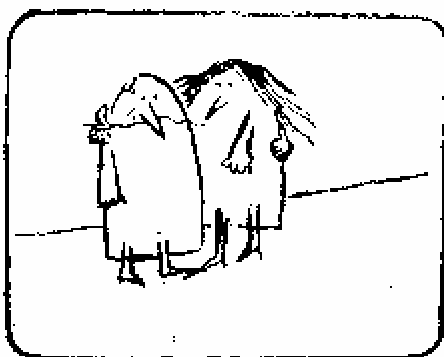
M：罗尼哈特小姐加入了两个这种小组。一天晚上，两个小组都在“悖论俱乐部”举办联欢会。一个组在东厅集会，一个组在西厅集会。



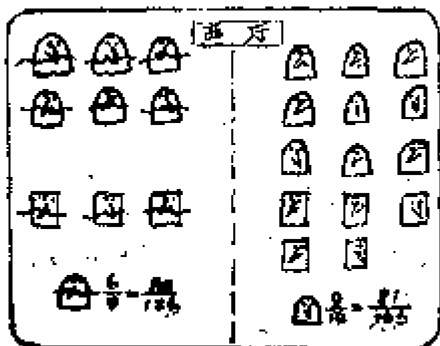
罗：有些人蓄着胡子，有些人没有蓄：有些人放荡不羁，有些人循规蹈矩。今晚，我想认识一个风流潇洒的小伙子。我是不是应该找留胡子的人呢？



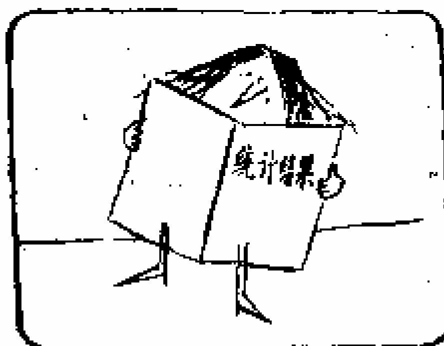
M：罗尼哈特对东厅的人作了一番统计研究：她发现，留胡子的人中风流人物的比例是 5/11 或 35/77。不留胡子的人中，风流人物的比例小一些，是 3/7 或 33/77。



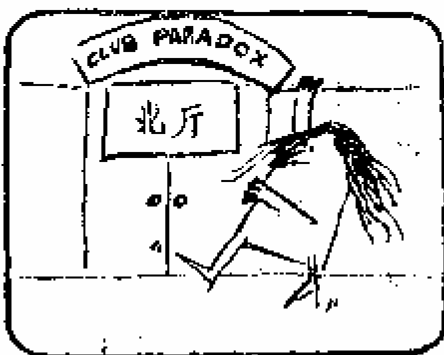
罗：所以，如果我参加东厅的联欢会，我就会结识留胡子的人。



M：她对两厅组的人作的统计是类似的。留胡子放荡不羁的人占 84/126。这要大于没有胡子的风流人物比例 81/126。



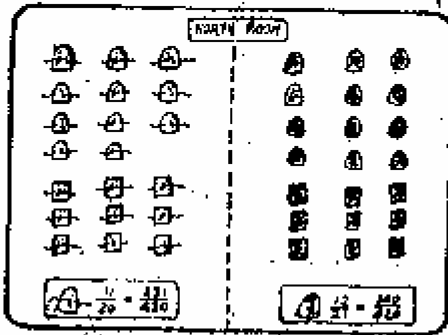
罗：多简单呀！不管我参加哪个组的联欢会，我只要找留胡子的，就比较容易结识风流潇洒的人物。



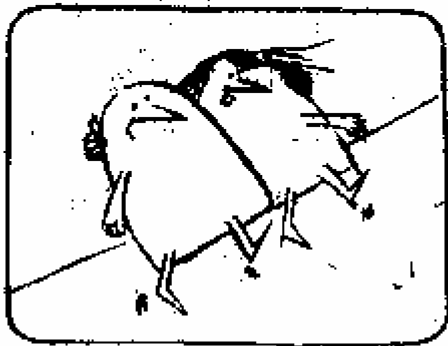
M：当罗尼哈特小姐到达“逆论俱乐部”时，这两个组已经决定联合举行联欢了。所有人都到北厅去了。



罗：现在我怎么办？如果两个组中都是留胡子的人多数使我满意，那么现在还应该是留胡子的人适合我要求的机会多些。不过，为保险起见我最好还是把联合集会的人核对一下。



M：当她作完这个新的图表时，她大吃一惊。比例改变了。现在要对上她的心思最好是找不留胡子的人！



罗：我得改变我的策略。可我还是不明白，怎么会成这样？

这个异常的悖论很容易用扑克牌来模拟。红牌表示风流人物，黑牌表示刻板人物。牌的背面用 x 表示留胡子的人，没有 x 表示不留胡子的人。

在五张红牌和六张黑牌背面标上 x。在这些牌中加上三张红牌和四张黑牌，上面没有标 x。总共是十八张牌。它们代表东厅的人。

把这十八张牌洗过，使之背向上摊在桌上。如果你想使你拿到红牌的机会最大，你应该拿有 x 符号的还是没有 x 符号的？很容易算出各自的比数，为了拿到一张红牌，你最好拿有 x 符号的牌。

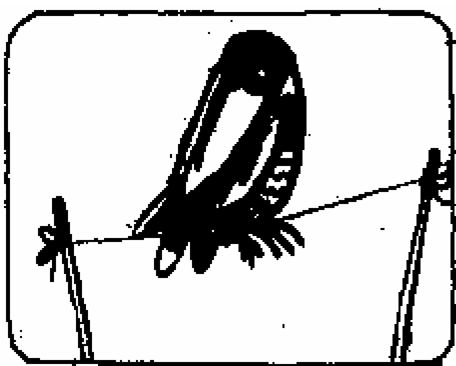
在西厅的人用同样的方法模拟。在六张红牌和三张黑牌背面标上 x。在这些牌中另加背面没有 x 的九张红牌和五张黑牌。总共是 23 张牌。洗牌后再摊放桌上。同样，很容易证明，如果你想拿到一张红牌，你拿有 x 符号成功的机会较大。

现在把两套牌合成四十一张的一套。洗牌后摊开。使人很难相信，但你要是计算一下就会相信，如果你想拿到—张红牌，这时你选没有 x 符号的牌比较容易成功！

当统计学家分析像药物试验结果这类数据时就会产生上述那样的悖论。比如，让牌表示参与两种研究试验的人。让 x 表示服用药物的人，没有 x 的牌表示服用安慰药（无实际药效）的人。红牌表示情况好转的人，黑牌表示情况没有变化的人。如果分开来分析，每一个试验均表明药物比安慰药有明显好的效果。可

是当两个试验结果合到一起时，分析却表明安慰药有明显好的效果！这个逆论说明，要设计出一种试验，使其统计分析结果总是可信的有多么困难。

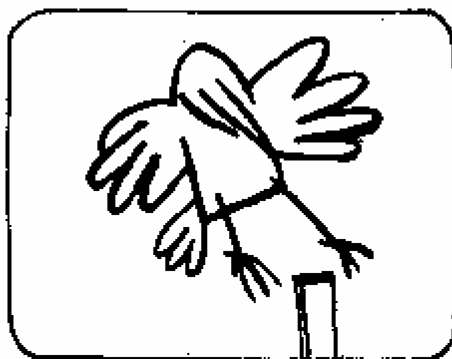
11 · 亨普尔关于乌鸦的悖论



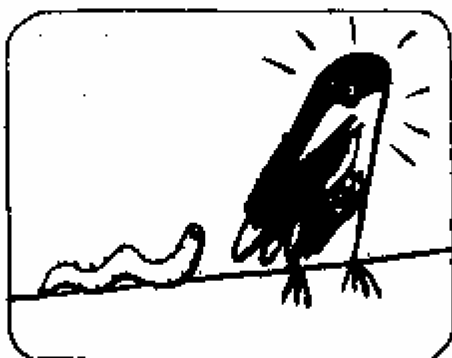
M：有一个关于黑乌鸦的著名悖论，它说明罗尼哈特小姐遇到的问题并不是罕见的。甚至有些专家也还在力求搞清它。



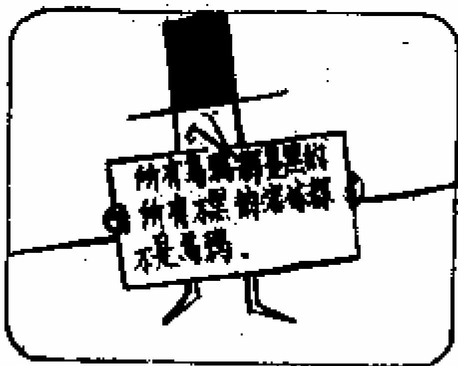
M：如果看到有 3—4 只乌鸦是黑色的，那么说“所有乌鸦都是黑色的”，这条科学定律的证据是不充分的。如果看到上百万只乌鸦都是黑的，这条定律的证据就比较充分。



甲：嘎！嘎！我不是一只黑乌鸦。只要他们发现了我，他们就会知道他们的定律是错的。



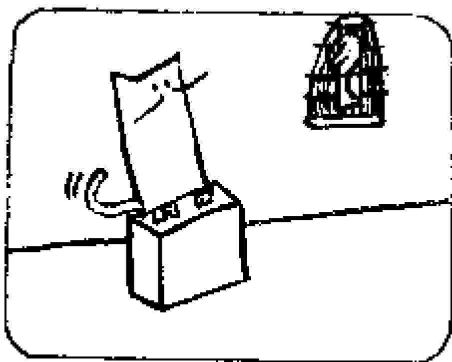
M：一条黄色的毛毛虫起什么作用？它可不可以当作这条定律的一个例证呢？



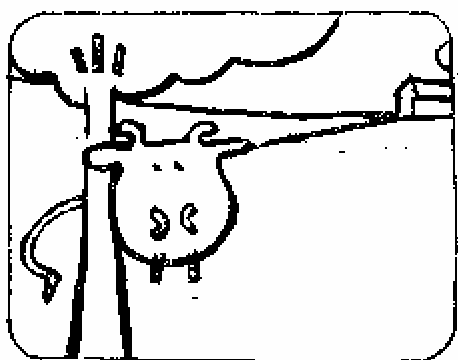
M：要回答这个问题，让我们首先把这条定律改成在逻辑上仍然等价的另一个形式吧，“凡是不黑的东西都不是乌鸦。”



乙：嘿！我已经找到一个不黑的东西了，它肯定不是只乌鸦，所以它证实了这条定律：“凡是不黑的东西都不是乌鸦。”所以它必然也证实了等价的定律：“凡是乌鸦都是黑的。”



M：很容易找到成千上万不黑的又不是乌鸦的东西。它们是否也证实了定律：“凡是乌鸦都是黑的。”？



M：卡尔·亨普尔教授设计了这条著名的悖论，他确信一条酱紫色的奶牛实际上使“所有乌鸦都是黑色的”概率稍为增大了一点。其他哲学家不同意这一点。你的看法如何？

这是近来发现的在证实理论方面的很多悖论中最惹人头痛的一个。尼尔森·古德曼（见下一条逆论的介绍）说道；“坐在屋里不用出去受风吹雨淋就可以研究飞禽学这一前景是这样吸引人，使得我们知道其中必然有值得探讨的地方。”

问题是要把关键找出来。卡尔·亨普尔相信，一个不是乌鸦的客体不是黑的这

件事实际上是证实了“所行乌鸦都是黑的”这个论断，不过只是在极微小的程度上得到证实。试想我们来做一个客体数量很小的假设检验，比如有 10 张扑克牌向下扑放在桌子上。我们假设所有黑牌都是黑桃。我们开始一张一张翻牌。显然，每当我们翻开一张黑桃时，我们就得到一个证实假设的例证。

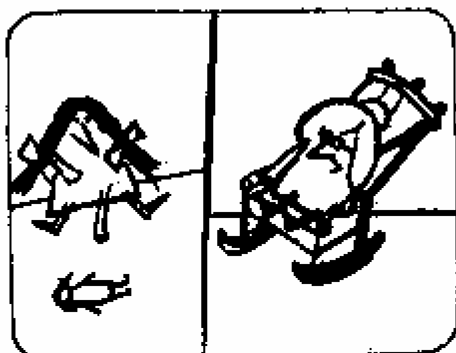
现在，我们把这个假设用不同形式改述为：“所有不是黑桃的牌都是红的。”两次我们翻出的牌不是黑桃时，它是红的，这肯定也像前面一样证实了我们的假设。确实，如果第一张牌是黑桃，其余 9 张都是红色的非黑桃牌，我们就知道我们的假设成立。

亨普尔说，当我们把上述过程用到乌鸦上，从不是乌鸦的客体不是黑的来证实我们的假设时，使人觉得别扭，其原因就在于地球上不是乌鸦的客体比起乌鸦来实在太多了，因而我们用上述说法来证实假设是不足取的。再则，如果我们环顾室内来找寻乌鸦，我们本已知道室内根本没有乌鸦，那么在这里找不到任何不黑的乌鸦是毫不足怪的。

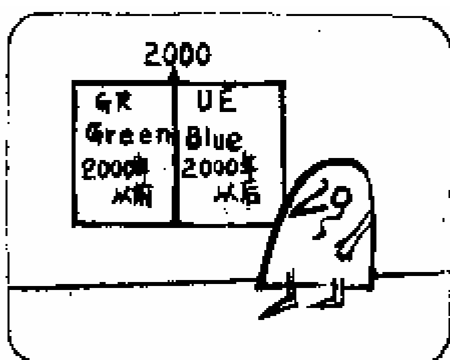
要是我们还没有上述这种补充知识，那么当我们发现了一个不黑的不是乌鸦的东西时，从理论意义上讲，它就算作证明“所有乌鸦都是黑的”的一个例证了。

亨普尔的反对者常要指出，按他这个理由，发现一条黄色的毛毛虫或一条酱紫色的奶牛肯定也是“所有乌鸦都是白的”这条“规律”的例证。那末，一个同样的事实怎么会同时证实“所有乌鸦那是黑的”和“所有乌鸦都是白的”的例证呢？关于亨普尔悖论的文章多不胜数；这个悖论在关于知识的证实方面的辩论中起着中心作用，而这正是后面的参考资料：韦斯利·萨尔蒙的论文所讨论的课题。

12 · 古德曼的“蓝绿”悖论



M：关于证实理论的另一条著名的悖论所依据的事实是，很多客体在某一个时候会改变颜色。绿色的苹果成熟变红，头发在年老时变白，银子变得黯然无光。



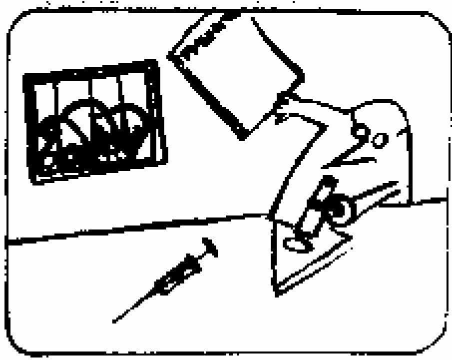
M：尼尔森·古德曼把一个满足两个条件的客体称为“蓝绿”。第一，它直到本世纪末都是绿色的；第二，在那以后就是蓝色的了。



M：现在试想两种说法：“所有的绿宝石都是绿的”和“所有绿宝石都是蓝绿的。”哪一种说法最有依据？



M：奇怪的是，两种说法都被证实了，上面的两个条件都是上面说法中的任何一种的例证，谁也不会看到有相反的例证！要想解释清楚只一种说法可以接受，另一种说法不能接受是很困难的。



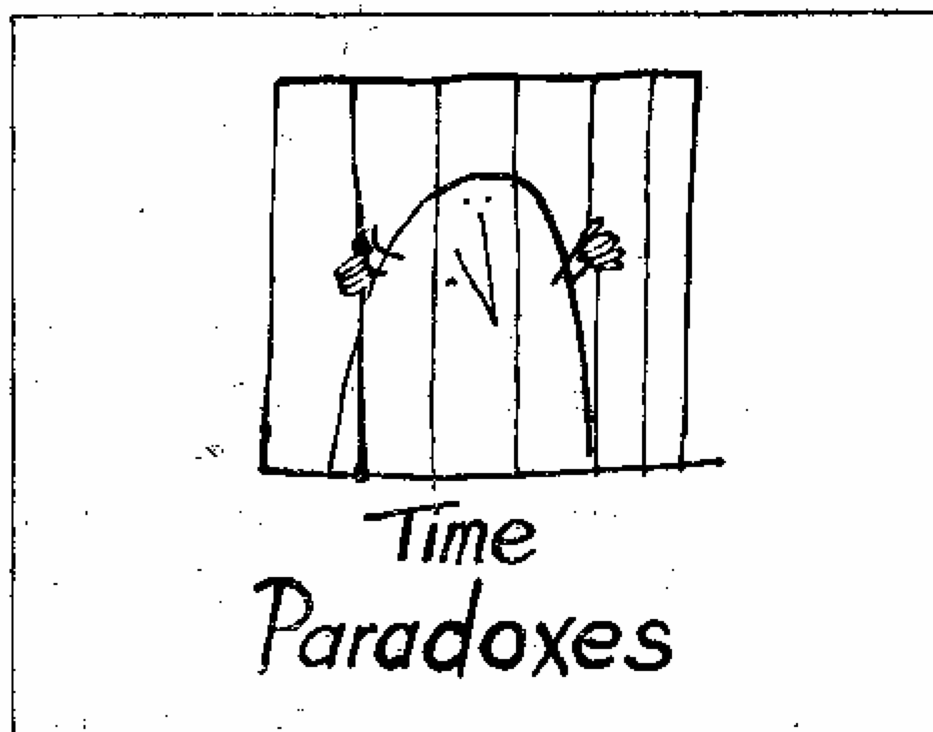
M：亨普尔逆论和古德曼悖论向我们表明，我们对于将统计学纳入科学方法的准确途径了解得是多么少。我们确实知道，如果没有统计学这一不可估价的手段，科学将不能持续不断地探索那些支配看我们这个神秘宇宙的规律。

尼尔森·古德曼的著名的“蓝绿”悖论也是很多哲学杂志文章讨论的课题。它就像亨普尔悖论一样，表明要以统计资料为依据来判定一个科学理论是多么“好”这是一件多么困难的事情。古德曼悖论证明，只有我们弄清楚了两个理论各有多少已观察到的证据之后，我们才可以比较二者的优劣。

在古德曼悖论中，“所有绿宝石都是绿的”和“所有绿宝石都是蓝绿的”得到同等数量例证的支持。我们比较喜欢头一种说法，因为在某种意义上讲，它此第二种要“简单些”。可是，我们现在就得解释“简单些”是什么意思。迄今为止，当哲学家或科学家面临两个理论均有同等数量的例证时，还没有谁能在寻找一种好办法来测度某种简单性方面取得进展，以便使我们定出一条定律，从这两个理论中选取—个。

这种关于证实理论的悖论看上去微不足道。但是正如逻辑悖论在发展现代演绎逻辑中起了重要作用一样，证实性悖论在力图为科学总结出“归纳”逻辑中也起了重要作用。在将来，这样一种逻辑兴许会成为科学家对支配我们宇宙的规律作永无止境的探索中的—个有价值的工具。

第六章 关于时间的悖论



从微小的基本粒子到巨大的星系，整个宇宙都处于永恒的变化之中，它那令人难以置信的因果每一微秒都在时间的无情流逝中变化着。没有人能想象出一个没有时间的真实世界。一个只亦在 0 秒钟的客观物体根本就不存在。幸好，时间是在均匀地流逝着，因而可以测量，伴随着测量，便有了数和方程。纯粹数学也许被当作是“没有时间的”，但是在应用数学中，从简单的代数到微积分以至更深的领域，大量问题都是以时间为基本变量的。

这一章集中了多种多样有关时间和运动的悖论。其中有些，如基诺悖论是古希腊人争论不休的，另外一些如时间“延迟”是相对论中的悖论，而以完成“超级任务”为己任的所谓无穷大机器则是本世纪的产物。关于时间的悖论很多，这里只能介绍一小部分，不过，我们选入的材料会引起极大的好奇心，相信它们能大大激发学生的兴趣。

其中最能从中激发学生深入重要的数学领域的是：

自行车轮悖论涉及旋轮线，绝妙地介绍了比二次曲线更为复杂的几何曲线。

滑雪者的挫折形象地说明简单的代数能够轻易地证明一个意料之外的普遍结果。

基诺悖论、橡皮绳、超级任务、奔波的小狗都介绍了极限概念，对理解微积分和一切高等数学有重要意义。

上述悖论也介绍了两种无穷大之间的重要差别：计数的数的无穷大（乔治·康妥称之为阿列夫零），和在一条线上的点的无穷多（康妥称之为阿列夫 1，“连续统的势”）。

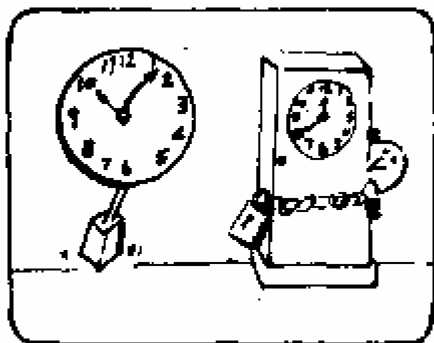
橡皮绳上的蠕虫用一个著名的级数——调和级数给出了最好的解答。这是学生们在继续学习数学中要多次碰到的。

关于时间倒流、快子、时间旅行等悖论介绍了一些对理解相对论很重要的基本概念。这些悖论会使学生们特别感兴趣，因为它们与很多科学幻想故事有关。

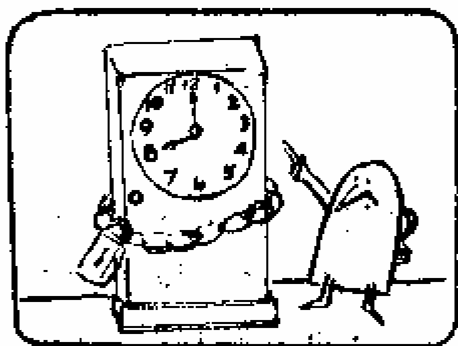
这些说明中，通过假定使时间进程分杈和出现平行的世界来避免时间旅行引起的矛盾，从而向学生介绍粒子物理中最令人兴奋的一个发展：量子力学的“多世界解释”。这个理论现在正在所谓“反文明的物理学家”中广泛讨论，这些物理学家有点想入非非，“进入”了“灵感的空间”。

最后一段是关于决定论和非决定论的，它让人初窥到哲学中一个永无休止的争论问题。它看起来远不像数学问题，但是这个关于预测未来的问题却是数学中的一个分支——“决策理论”中不可回避的问题，而且它至今还未得到解决。

1·卡罗尔关于坏钟的悖论

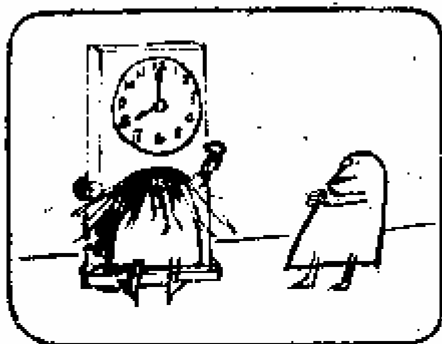


M：有两台钟，一台每天慢一分钟，另一台根本不走，哪一台报时准些？



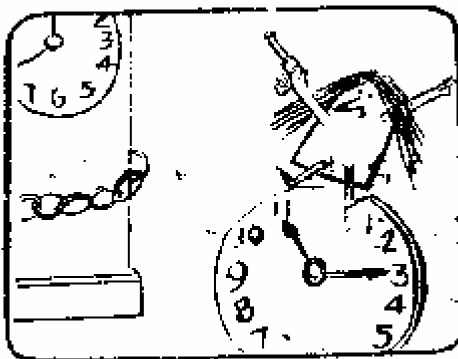
M：刘易斯·卡罗尔作如下论证——

刘易斯：一天慢一分的那台钟每两年才对一次，不走的那台钟每 24 小时就对了两次，所以对报时而言不走的那台钟报时好些，你赞成吗？

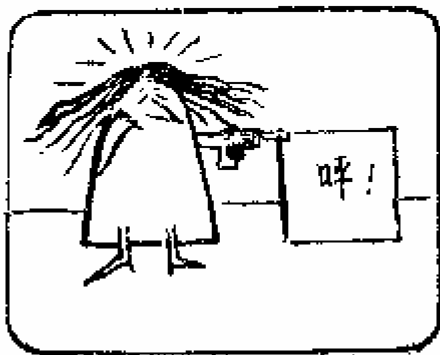


M：艾丽斯感到迷惑不解。

艾丽斯：我知道不走的那台钟每到 8 点时就对了，可我怎么知道什么时侯就正好是 8 点呢？



刘易斯：哦，那很容易解决。你只要手中拿一支枪，站在停着的钟旁。

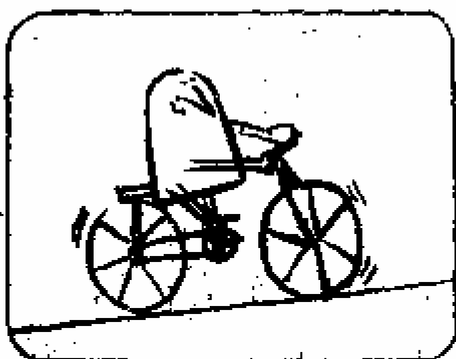


刘易斯：眼睛死死盯着那台钟，在钟恰好对准的时刻立即开枪，听到枪响的每一个人就都知道这时是 8 点正。

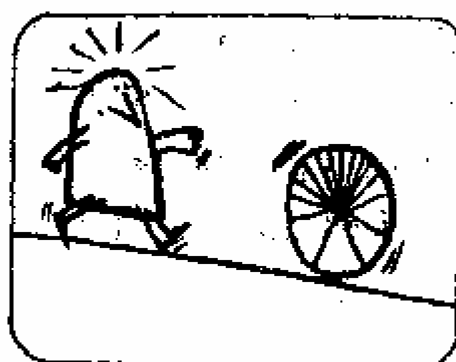
刘易斯·卡罗尔是查尔斯·L·道奇森的笔名，他在英国牛津大学的一个学院——基督教堂教学。他这两台钟的故事收在刘易斯全集中，而且他的很多其他文集中也有涉及。

如果你的学生中有人怀疑那台走着的钟要两年才对一次，他们就想要证实这一点。因为这台钟一天慢一分，但它要在慢了 12 小时时才又对准，这就需要 720 天时间。

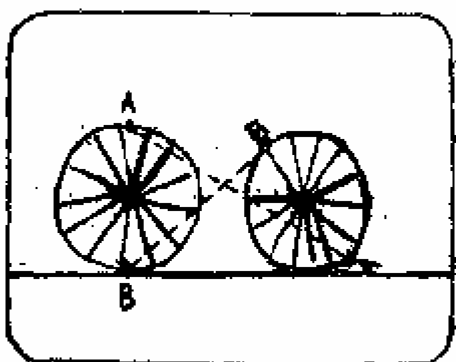
2·迷惑人的车轮



M：刘易斯·卡罗尔对钟的诡辩只不过是没有意思的笑话，可这车轮却另当别论。你可曾知道自行车轮子的顶部要比底部跑得快？



M：那就是当自行车擦身而过时车轮上部的辐条看不清楚的原因。



M：当车轮滚动时，让我们看看轮上的两个点。接近轮顶的点 A 走过的路程比接近轮底的点 B 远得多，速度是单位时间内走过的路程，所以点 A 走得远比 B 快，对吗？

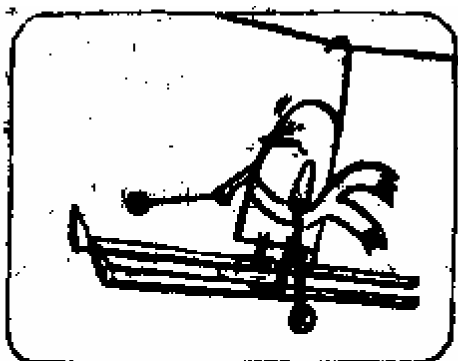
在我们将滚动的车轮上下两部分的速度作比较时，自然是指它们对地面的速度。说明这个悖论的最好方法、是向你的学生介绍著名的旋轮线。这个曲线是当一个车轮沿一条直线滚动时，车轮边缘上任意一点所描绘出的曲线。当一点触及地面时，它的速度为零。车轮滚动，这一点的速度加快，一直到它在轮顶时达到最大。然后，它又减速，减到它再次触及地面时，速度又降到零。如果是一个有凸缘的车轮，譬如火车的轮子，凸缘上的一点在低于车轨时，它实际上是向后运动，画出一个小圈。

旋轮线具有很多美丽的数学性质和机械性质，这在《科学美国人》第六本数学游戏一书的第十三章"旋轮线，几何学的皇后"中介绍过。这一章还介绍了如何用咖啡罐头盒来做一个简单的装置的方法，这个装置类似一个滚动轮，它可以在

一张纸上描出旋轮线。制作这个装置对学生是个极好的锻炼，用代数方法分析这个曲线是解析几何中的重要练习。

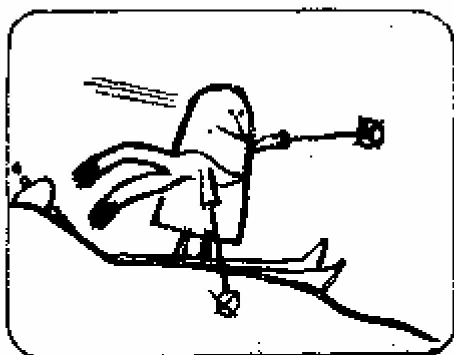
在还没有汽车的时候，四轮马车和二轮马车是常见的交通工具，车轮上部快速运动的辐条模糊不清的景象是人们熟悉的。当画家如漫画家想要表现具有大辐条的车轮运动时，他们往往只要画出车轮下部的车条就行了。

3·滑雪者的挫折



甲：真是一个滑雪的大好天气！我真希望这次爬坡滑行能超过每小时 5 公里（实际上只有每小时 5 公里）。

M：如果这个滑雪者想把他上坡下坡往返全程的平均速度提高到每小时 10 公里，那么他下坡必须要多快才行？



M：每小时 15 公里？60？100？叫人有点不敢相信，只有一个办法能让他把平均速度提高到每小时 10 公里，就是在零秒钟内下到坡底。

你的学生最初也许以为这个悖论取决于斜坡的距离，岂知这个变量与我们的问题无关。滑雪者用某个速度滑上坡一段距离。他在下坡时想要使他往返全程的平均速度加倍。可是，要做到这一点，他就须在上坡所花的时间内滑行原来距离的两倍。很明显，这就是要他根本不用一点时间就滑到坡底。这是办不到的，所以没有任何办法能使他把平均速度从每小时 5 公里提高到每小时 10 公里。

很容易用代数方法证明这个普遍结果。令 x 公里为沿斜坡从坡顶到坡底之间的距离，y 小时为上坡用的时间，z 公里/小时为上坡的速度。因此，

$$x=yz$$

假定滑雪者在 k 小时内下坡，并使他往返全程的速度加倍。那么平均速度就是 2z 公里/小时，他在(y+k)小时内滑行 2x 公里。所以我们得方程：

$$\frac{2x}{y+k}=2z$$

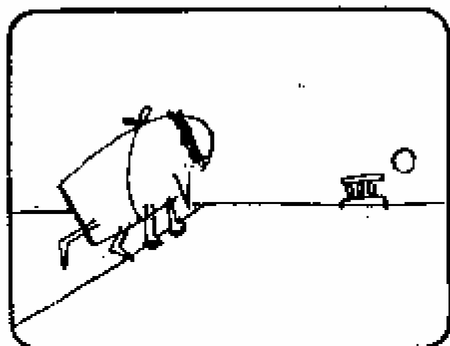
在上面的方程中用 yz 代 x，简化得到

$$y=y+k$$

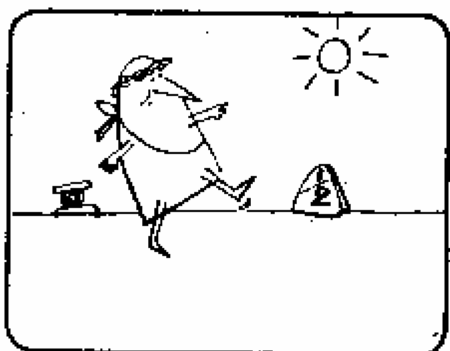
$$k=0$$

不管他上坡的距离长短，或者他上坡的速度是多快，只要他想使往返全程的平均速度加快一倍，他就必须不用时间就下到坡底。换言之，他的速度须是无穷大。

4 · 基诺悖论

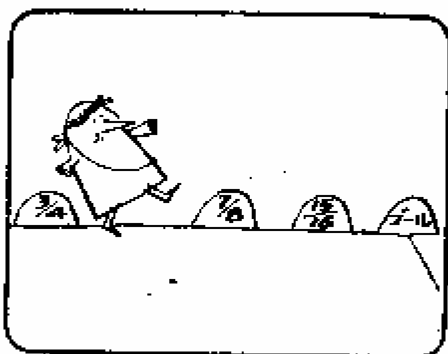


M：古希腊人设想出了很多关于时间和运动的悖论·最著名的一个是基诺关于跑步人的诡论。

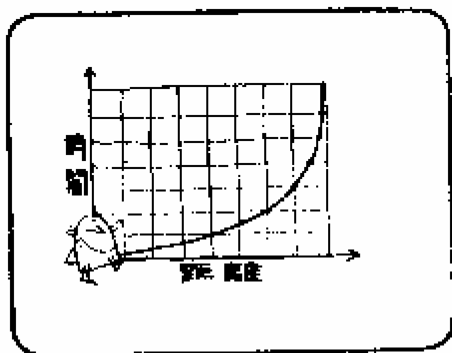


M：基诺的跑步人作如下推理。

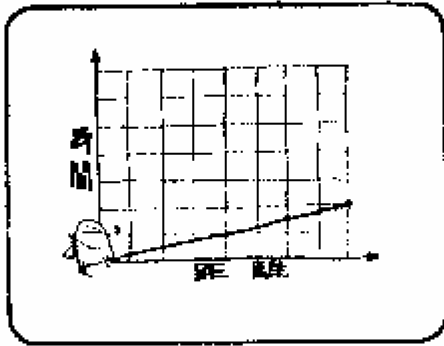
甲：在我达到终点线之前，我必须经过中点。然后·我必须跑到 3/4 处，它是剩下距离的—半。



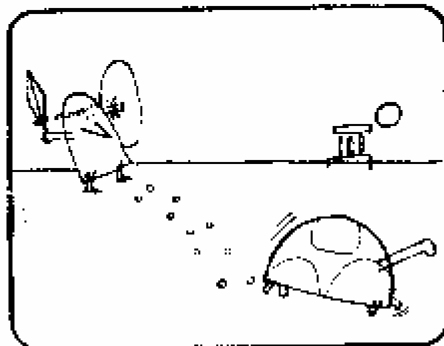
甲：而在我跑完最后的 1/4 这段路之前，我必须跑到这段路的中点。因为这些中点是没有止境的，我将根本不能达到终点。



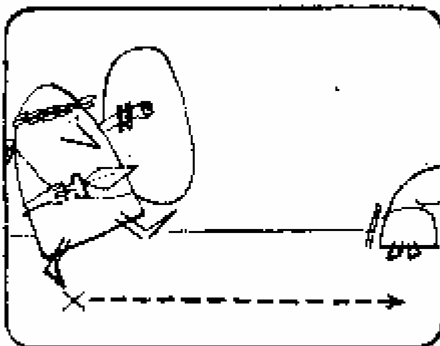
M：假定跑步人每跑一半要一分钟。绘出的时间—距离关系图表明他是如何越来越接近终点，而绝不会达到终点的。他的论据对吗？



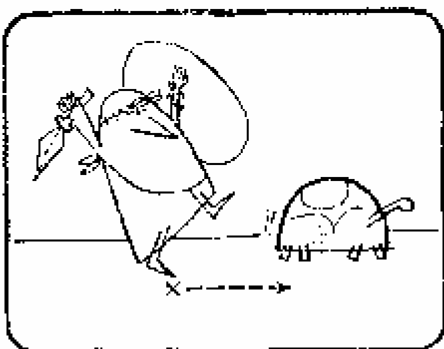
M：不对，因为跑步人不是每跑半截都用 1 分钟。每跑一半所花的时间都是前一段时间的一半。他只要两分钟就可以到达终点，只不过他须通过无穷多个中点而已。



M：基诺设计出一条关于阿基里斯的悖论。这个战士想要捉住一公里外的一只海龟。

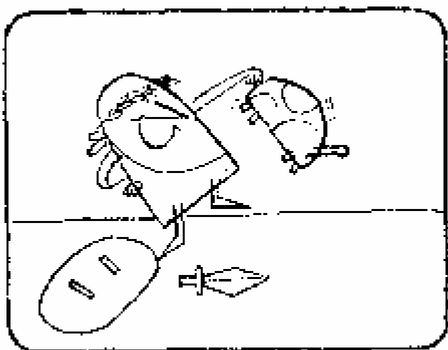


M：当阿基里斯跑到海龟原来所在点时，海龟已向前爬了 10 米。



M：但是当阿基里斯跑到 10 米处时，海龟又爬到前面去了。

海龟：你别想抓住我，老朋友。只要你一到我原先所在的地方，我就已经跑到前面一截；了，那怕这个距离比头发丝还小。



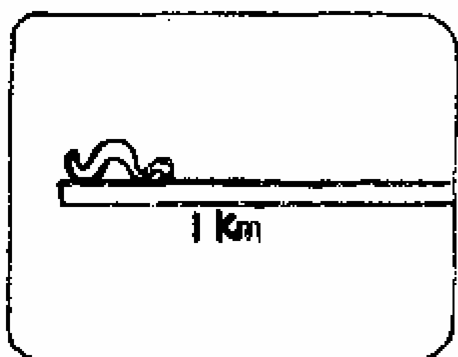
M：基诺当然知道阿基里斯能够捉住海龟。他不过是显浅的说明，在把时间和空间看成是由一连串的离散点组成，就像一串念珠前后相连那样时，会引起怎样令人迷惑的结果。

在这两个悖论中，我们必须把两个跑步人都等价地看作沿一条直线作匀速运动的点。基诺之道由 A 向 B 运动的点确实到达了 B 点。他这两个悖论的设计显示出，当一个人试图把直线分为若干分离的点，这些点一个个依次往下排列，同时再把时间分成前后相随又互不重叠的间隔，并以此来说明运动时，会碰到怎样的困难。

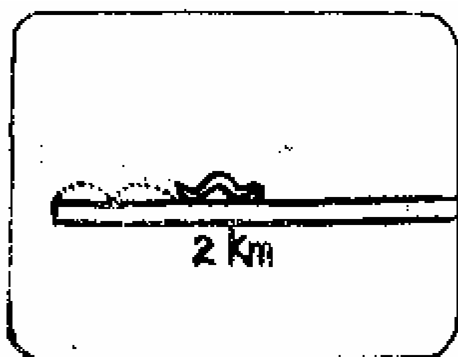
像我们在上一组画面中那样，仅仅说明跑步人能够到达 B 点，是因为他每跑一个新半截所需的时间是跑前段路时间的一半，这还不能使基诺满意。他总是答道，就如在直线上总有—个新的中点要跑到一样，时间也总有新的半刻要经过。简言之，基诺用于直线上的论点也可以用到时间的序列上来。虽说时间可以越来越接近两分钟，但总还有一段无限小的时间瞬息要通过。阿基里斯和海龟的悖论也都是一样的道理。在无穷进程中的每一步，都还有一个没完没了的“下—步”要做，在空间和时间两方面都如此。

很多科学的哲学家都同意罗素对基诺悖论所作的著名讨论，这发表在他的《我们对外部世界的知识》一书的第六讲中。罗素指出，基诺悖论只有到乔治·康妥之后才能有效地解答。在十九世纪建立了他的无穷集理论。康妥证明了，一条直线段上的点数（或一个有限的时间区间内的间隔），是“不可数的”，这就是说不能把它们和计数用数一一对应，如果说基诺的跑步人总有更多的点要数，那么他是数不完的，跑步人也就到不了终点。可那些点是不可数的。学生们如果想更多地了解基诺悖论的旨趣，最好是参考韦斯勒·C·萨蒙编辑的一个平装文集：《基诺悖论集》。

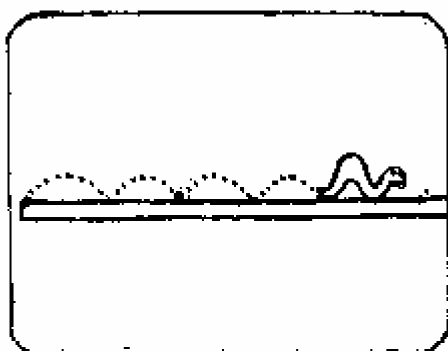
5·蠕虫与橡皮绳悖论



M：这是基诺未能想出来的又一个悖论。一条蠕虫在橡皮绳的一端。橡皮绳长一公里。



M：蠕虫以每秒 1 厘米的稳定速度沿橡皮绳爬行。在 1 秒钟之后，橡皮绳就像橡皮筋一样拉长为 2 公里。再过一秒钟后，它又拉长为 3 公里，如此下去。蠕虫最后究竟会不会达到终点呢？



M：根据直觉你会说：蠕虫绝不能爬到终点。可是，它爬到了。试试看，你是否能算出蠕虫要爬多远。

理解这个问题的关键是橡皮绳的伸长是均匀的。这意味着蠕虫随着拉伸也向前挪了。

1 公里有 100,000 厘米，所以在第一秒末，蠕虫爬行了橡皮绳长度的 $\frac{1}{100,000}$。在第二秒钟内，蠕虫又在长度为 2 公里的橡皮绳上爬了它的 $\frac{1}{200,000}$，在第三秒内，它又爬了 3 公里长的皮筋的 $\frac{1}{300,000}$，如此继续，蠕虫的进程表示为整条橡皮绳的分数就是：

$$\frac{1}{100,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\cdots\right)$$

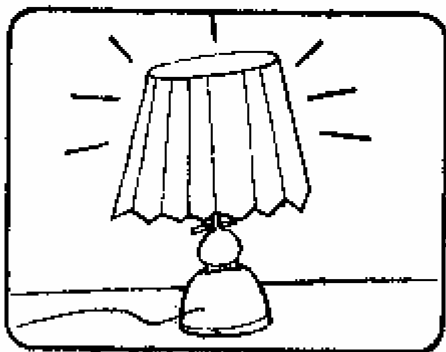
括弧里的级数是人们熟悉的调和级数。由于这个级数是发散的，它的部分和我们要它有多大，就可以有多大。只要这个和超过 100,000，上面的表达式就超过 1。这就是说，蠕虫已经到达终点。此时调和级数该部分和的项数 n 就是蠕虫爬行的秒数·也是皮筋最后长度的公里数。

n 的値近似等于 e^{100000}

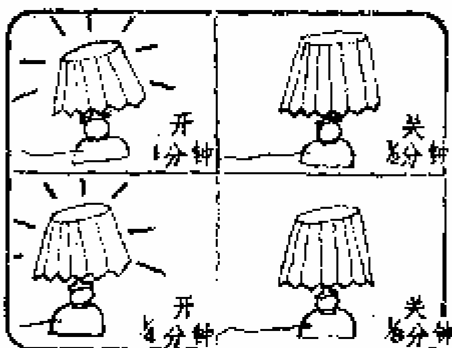
精确的公式及其推导方法，参见《美国数学月刊》1971 年第 78 卷十月号，第 864—870 页，博斯和伦奇的文章"调和级数的部分和"。结果证明，橡皮绳其长无比，比已知的宇宙直径还长得多，同时蠕虫要爬到终点的时间也无比漫长，它比已知的宇宙年龄还要远久得多。自然，这个问题说的是一条理想的蠕虫，它可以表示为在一条理想的橡皮绳上的一个点。若是条真的蠕虫，那末在还没有怎么开始这段旅程就早已死了，同时，若也是真的橡皮绳则需把它拉得细到它只能由分隔的分子连成这样难以想象的程度。

不管这个问题的参数，即橡皮绳的长度，蠕虫爬行的速度、以及这根橡皮绳每单位时间拉长多少，蠕虫总是能在有限的时间内到达终点。真正的问题是在改变橡皮绳拉长的方式时产生的。例如，如果橡皮绳按几何级数拉长，譬如每秒钟拉长一倍，会出现什么情况？这时，蠕虫就再也不能达到终点了。

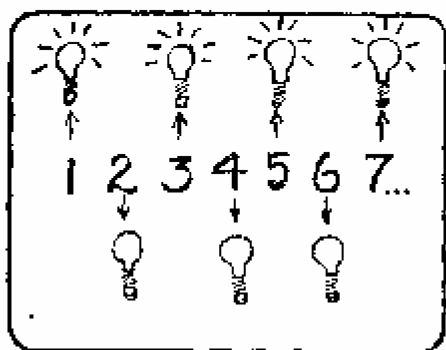
6 · 超级任务



M：在这里，哲学家争论的是一类新的时间悖论，称为超级任务。最简单的一个是关于一盏灯，它用按钮来开关。



M：把灯拧开一分钟，然后关掉半分钟，再拧开 1/4 分钟。如此往复。这一序列的末了恰好是两分钟。那么在这一系列过程结束后，灯是开着还是关着？



M：电灯按钮每按奇数次，就使电灯打开。每按偶数次，就使它关掉。如果电灯最终是开着，则意味着最后的计数是奇数。如果最终灯灭了，则表示最后一次是偶数。但是根本不存在最后一次这个数。但电灯不是开着就是关着，可是无法知道究竟是哪一种。

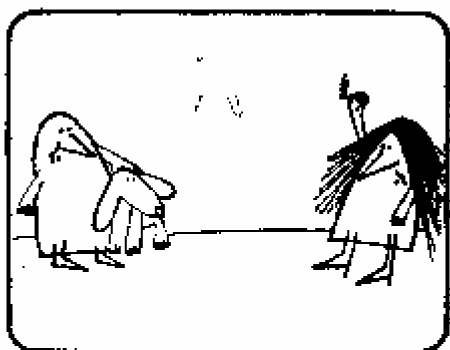
现在自然科学的哲学家对于怎样澄清涉及“超级任务”的悖论意见尚不一致，而超级任务乃是指由称为“无穷大机器”来完成的任务。电灯的悖论是汤姆森首次写出它之后而以汤姆森悖论闻名的。人人都同意汤姆森电灯是造不出来的，但问题的关键不在这里。关键是，如果作出某些假定，这种电灯在逻辑上是否可以接受。有些人认为这种电灯是富有意义的“思想实验”，而另一些人则断定它毫无意义。

这个悖论颇为麻烦，因为看上去似乎没有任何合乎逻辑的理由说明那盏电灯不能完成一个开和关的无穷序列，就如基诺的跑步人那样。如果说基诺的跑步人能够在两分钟内跑完无穷多个中点，那么为什么就不能有一个理想的电灯开关，按了无穷多次便在恰好两分钟内结束一系列的开关过程呢？但是，假如这种电灯能做到这一点，看来就证明确有“最后”一次开、关的次数，这是荒诞无稽的。

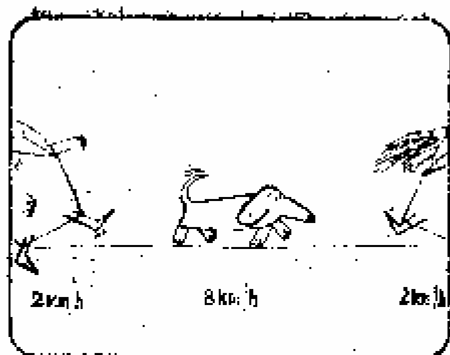
哲学家马克斯·布莱克提出了同样的悖论，一个无穷大机器把一枚玻璃球在一分钟内从盘 A 送到盘 B，然后在 1/2 分钟内再把玻璃球倒回盘 A，在下一个 1/4 分钟又把玻璃球倒到盘 B，如此往复，每次的时间都是这个序列中前次的一半。这个序列是收敛的，在准确的两分钟时结束。玻璃球在那里？如果它在某一个盘子里，就意味着最后倒盘的次数不是奇数，就是偶数。由于根本没有最后一次，所以两种可能性看来都排除了。但是假如玻璃球不在盘子上，那么它在哪里？

对这样那样的超级任务感兴趣的学生可以在萨尔蒙出的书中找到一些基本论文，这些论文在阿道尔夫·格伦德鲍姆的《现代科学和基诺悖论》一书中有详细的引述和分析。此外 1971 年 3 月的《科学美国人》中的数学游戏也介绍过这个内容。

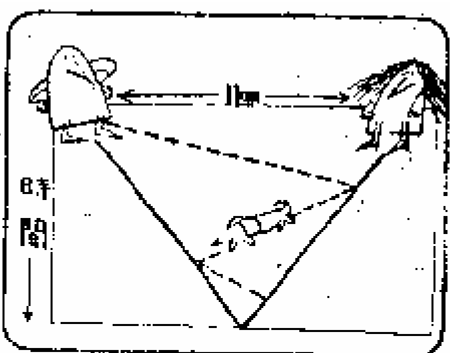
7 · 主人和狗的悖论



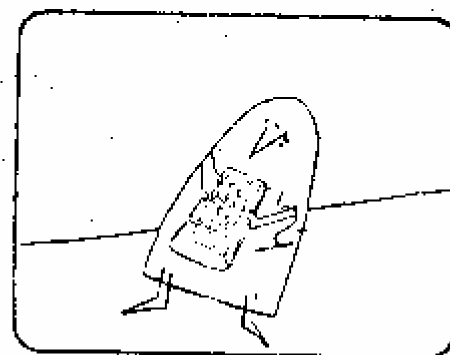
M：这是由一只狗来完成的超级任务。开始，小狗弗多和它的主人汤姆在一起。玛丽在一公里外。



M：汤姆和玛丽彼此以每小时 2 公里的速度迎面步行。弗多对两位主人同样地热爱，故在两人之间来回跑个不停。假定小狗来回跑掉头是即刻发生的。

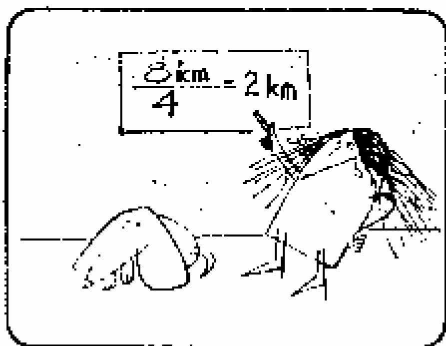


M：在这张时间—距离图上很容易者出弗多跑的路线。当汤姆和玛丽在路中心碰面时，弗多是向西还是向东？



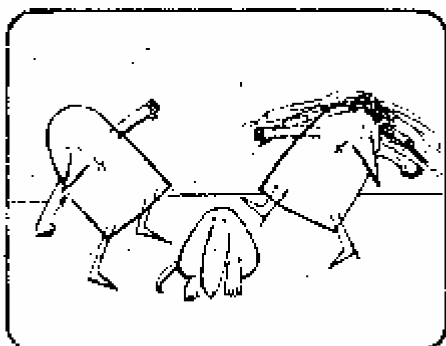
M：那个问题就如电灯最后开着还是关着一样不能回答。但是我们可以帮助汤姆算出狗跑了多远。

汤姆：真够呛，玛丽。我得算一个复杂的之字线路序列的总和。

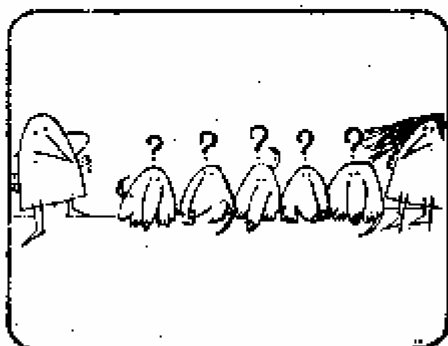


玛丽：啊，不用，你这笨蛋。我们每人每小时走 2 公里，所以我们每人每 15 分钟走半公里。因为我们出发时相隔 1 公里，所以我们两人在 15 分钟之末碰面。弗多每小时跑 8 公里，所以在一刻钟里它跑这个距离的 $\frac{1}{4}$，也就是 2 公里

汤姆：哎呀！你对了！我甚至连这个计算器都用不着了。



M：假定问题反过来，汤姆、玛丽和弗多从中点出发走同一路程。汤姆和玛丽以原有的速率背道而行，弗多则在两人之间来回奔跑。汤姆和玛丽到达这条路的终点时，弗多在哪里？



M：看起来好像是不可能的，但事实却是小狗可以在汤姆和玛丽之间任意一点。如果你不信的话，称可以先把弗多放在汤姆和玛丽之间任意一点，然后开始按第一次的路线走。最后，狗一定会和两人同在中点。

头一个问题，玛丽和汤姆彼此相向而行，弗多则在他们之间往返奔跑，这个问题是经典问题，可以有很多不同的陈述方法。有时是一只鸟在两列相向接近的火车之间来回飞，有时是一只飞虫在两辆彼此迎面骑来的自行车之间飞来飞去。大多数人，包括很好的数学家都可能没有看出狗跑的距离很容易算出。在 15 分钟后，汤姆和玛丽碰面，所以狗跑了 15 分钟。如果它以每小时 8 公里的速度奔跑，则 15 分钟内它必然跑了 2 公里远。

有一个关于著名的匈牙利数学家冯·纽曼的故事。有人向他提问过一个类似的问题，他想了一会儿就作出了正确的回答。提问的人很称赞他，说道："大多数人以为他们要用一种困难的方法，即用对走过的路径线段的无穷序列求和的方法来解决这一问题呢。"冯·纽曼有点吃惊，他说："可我就是那样做的呀。"

在汤姆和玛丽相逢时，弗多面向哪一边？这个问题就类似于问汤姆森电灯是开着还是关了，或是玻璃球在盘 A 中还是盘 B 中？看起来好像小狗要么向东，要么向西，但无论何者都意味着，在之字线路的无穷序列中计数的最后一次要么是奇数，要么是偶数。

当我们把这个过程的时间反演，即开始是玛丽、汤姆和弗多在道路的中央，

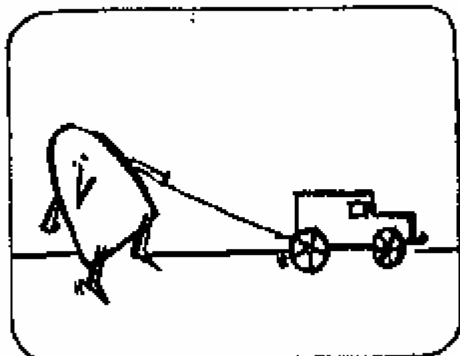
然后玛丽和汤姆背道而驰，弗多在两人中间来回跑，这时就会产生另一个悖论。按照直觉，我们以为，如果一个明确的过程作时间反演的话，这时一切过程都反转过来，那么到结束时，我们必然正好回到起点。可奇怪的是，当时间反推时，上述进程不再是十分确定的了。当该过程俺正向演进时，弗多正好在中央。但是，当这一过程反过来进行时，最后弗多的位置却无法决定。小狗可能在道路上任何一点。

对于这一悖论的较详细讨论参见萨尔蒙发表在《科学美国人》1971 年 12 月数学游戏部分的分析。

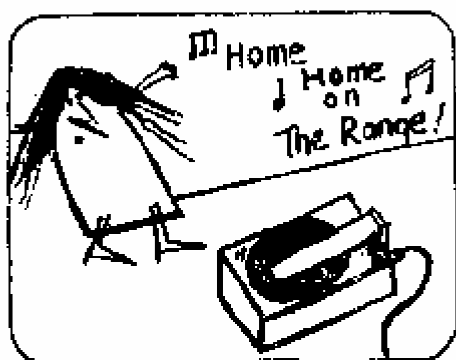
这个问题，以及前面介绍的关于超级任务和跑步人的悖论，是对极限概念及其它在几何级数求和中的应用的极好介绍。弗多的之字路线有点类似于一个弹跳小球的路线，在这方面学生们可能有兴趣研究简单一点的弹球问题。譬如，假定一个理想的小球从 1 米高落下。然后，它总是反跳到原来高度的一半。如果小球每跳一次要一秒钟，它将永远弹跳不止。但是，正如基诺的跑步人、电灯、玻璃球机器和弗多一样，小球每次跳的时间却比前次短。时间级数收敛于一个极限，这意味着小球在有限的时间内便停止了跳动，只不过它（理论上）要作无数次跳动罢了。

在上述例子中，小球跳过的距离是 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots=2$ 米。假定小球每次总是跳到它前次高度的 $\frac{1}{3}$ 。那么在它停下时，它跳过了多少距离？

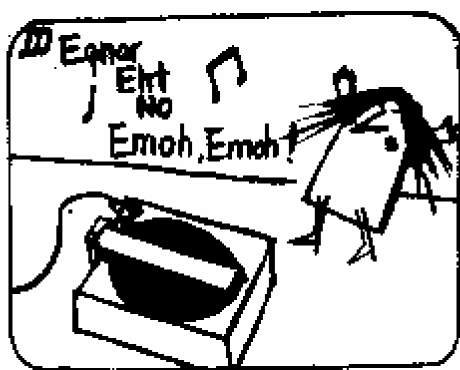
8·时间能够倒流吗？



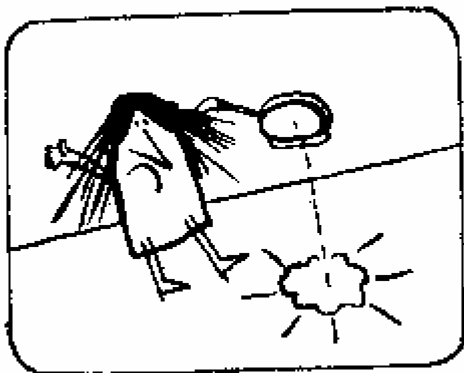
M：当某项运动反转时，如一个人往回走，或一辆汽车往回开时，看起来如像时间已经倒流。



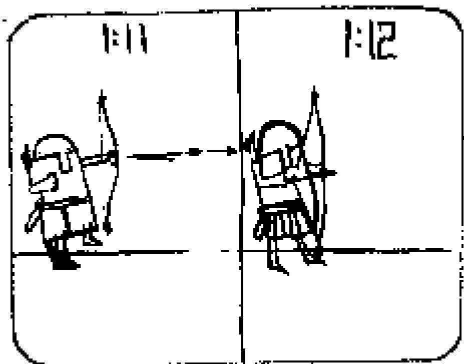
M：这首熟悉的歌……



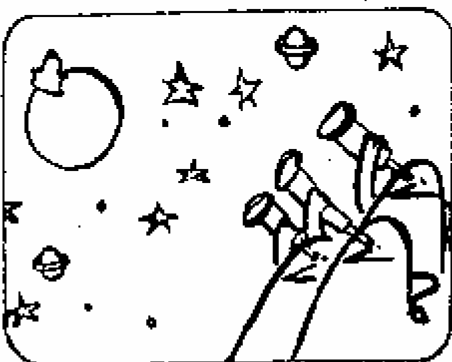
M：……在反转播放时象是这样的。



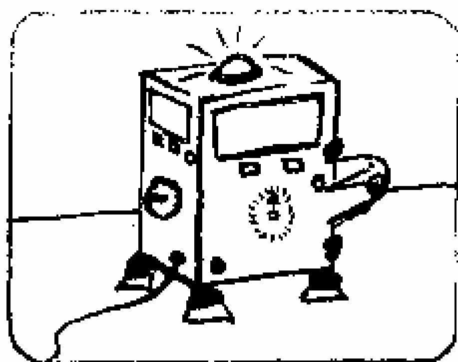
M：生活中大多数事情是不能逆转的。



M：时间好比一支箭，它总是指向一个相同的方向。即使一首歌反转播放时，音符也还是一个一个随着时间向前推移。



M：我们不可能看见未来，我们只能回顾以往。当你看见一颗一千光年以外的星时，你所看见的已是它一千年前的情景。



M：可是，看见过去与身临其境是不同的。将来是否可能让人们进入一个时间机器里，去实际访问一下过去或未来？

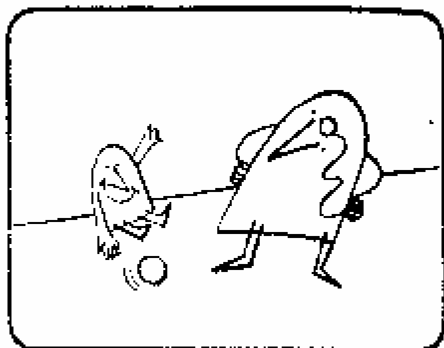
如果把时间逆转理解为运动的方向的倒转，再考虑哪些事是可以逆转的，哪些事不能逆转，就会展开一场有趣的课堂讨论。要想使差别显得明朗，最好的方法是用一个电影摄影机拍下事例，然后再在银幕上放映出来，不过影片要倒着演。在倒演影片时，哪些事例看来违反了自然规律，哪些并不违反自然规律？

例如，一辆汽车倒着开的画面看来并非不可能。司机也许不过在倒车。但是在一个画面里，潜进水中的人先是从水中出来，再回到跳板上，这种情况立即使

人看出影片放倒了。同样的一个破碎的鸡蛋在地板上又收拢在一起，然后跳回到人的手中也是明显的把影片映倒了。这些事情在真实的生活中是绝不会发生的。

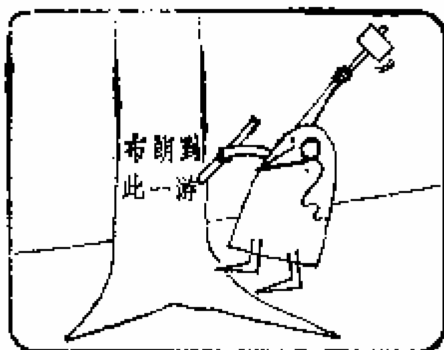
在一个过程结束时，可以得到结论：即使用改变运动方向的办法来使一个事件成为“时间反演”，如倒着放录音，但事件却依然还是随时间向前推移。箭总是向着它指向的方向运动。如果你看见一支箭穿过天空回到射手的弓上。那么，它在回到弓上之前，必定先是在半空中。爱丁顿爵士曾把时间比作一支象征的箭，它总是指着一个方向。时间无情地流逝，从过去向着未来，绝不会从未来向着过去。

9 · 时间机器

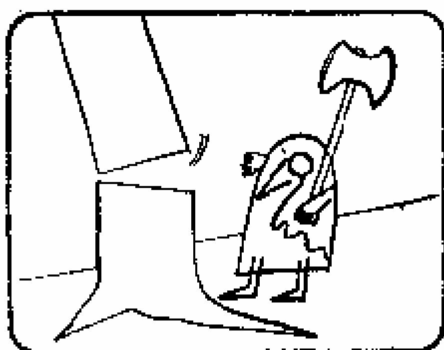


M：布朗教授刚刚返回到了 30 年前，他正注视着他还是婴儿的自己。

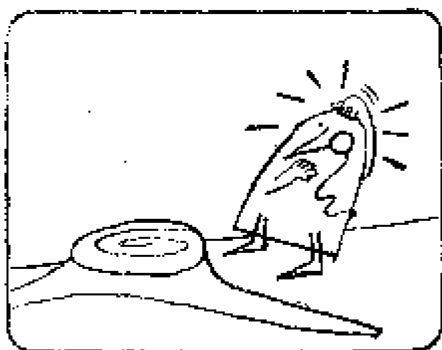
布朗：假定我把这婴儿杀死，那他不会有长大起来而变成布朗教授！我会突然消失吗？



M：现在布朗教授又跑到未来 30 年后。他正在他实验室外的橡树上刻他的名字。



M：教授又回到离去的那个时间。几年以后，他决定砍掉他那颗橡树。他砍完以后，一下变得困窘起来。



布朗：嗬……三年前，我曾漫游未来的 30 年后，并在这颗树上刻下了我的名字。27 年以后，当我到了我过去曾经到过的地方时，将会出现什么情景呢？什么树也没有了。我要把名字刻在其上的树从哪儿来呢？

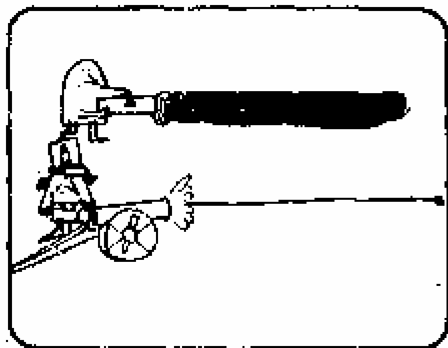
大量的科学幻想故事、电影、电视都表现过到过去或未来去旅行。这方面经

典的故事是威尔斯的《时间机器》。

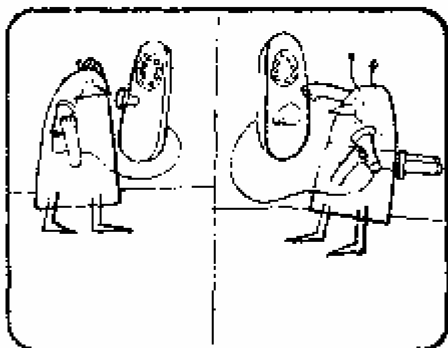
这组画面考察的问题是：一个时间旅行问题。从逻辑上讲会不会是可能的，或者会不会导致矛盾。从上面给出的悖论明显看出，如果我们假定只有一个单—的宇宙，随着时间向前演进，任何一个想进入过去的尝试都会导致逻辑上的混乱。考虑第一个悖论，一个时间旅行者进入他自己的过去，看见自己是个婴儿。假如他杀死这个婴儿，那他就会既存在，又不存在。假如这个长大成为布朗教授的婴儿已被杀死，那么布朗教授又从何而来？

第二个悖论更加微妙。布朗教授跑到时间前面。在树上刻下了他的名字，这里面没有矛盾。矛盾是在他回到现时之后发生的，即在他回到现时之后，砍掉了那棵树，使它从未来消失了。我们就又碰到了矛盾。在未来的某个时候，树既存在，又不存在。

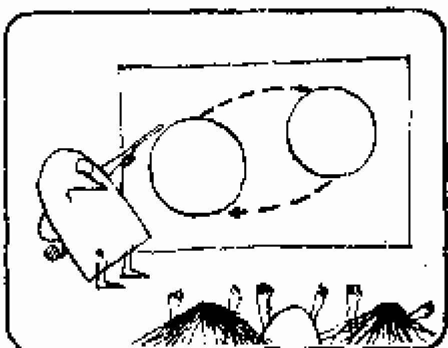
10 · 超光速电话



M：近些年来，物理学家推测有一种称为快子（tachyon）的基本粒子。快子跑得比光快。根据相对论，如果有快子存在，它们必然随时间逆向运动。



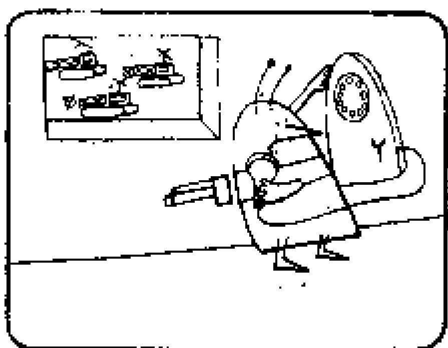
M：布朗先生想，他已发明了一架快子电话机，使用快子与他的朋友伽玛博士联系，而他的朋友住在另一个星系。



M：布朗教授正在向他的学生讲一个实验：

甲：明天中午·我要用我的快子电话机给伽玛教授打个电话。我要他挂上电话，然后数他窗外直升飞机的数目，然后回电话给我，告诉我飞机的数目。

乙（女孩）：先生，这办不到。



甲：呵，为什么不行？小姑娘？

乙：因为快子是逆着时间走的。伽玛博士接到你的电话将在午前 1 小时，他回你的电话又要往回 1 小时，所以，你将在你提出问题之前两小时就得到了它的答复。那是不可能的。

这段对话证明，不仅仅对人而言，无论是什么东西，当它随时间往回追溯就

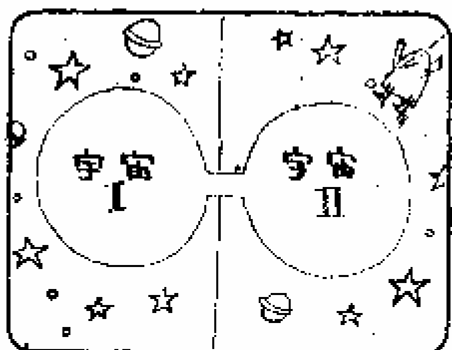
会产生矛盾。无论什么事物随时间回溯，同样都会引起矛盾。例如，布朗教授也许在星期一对自己说："这个星期五，我要把我的领带放到这台时间机器里，把它送回到星期二，也就是明天。"确实，在星期二他发现他的领带在机器里。假定他接着把领带烧掉。当星期五到来，就没有领带可送回了。又是如此，星期五那天，领带似乎又存在，又不存在。当布朗教授把它送回到星期二时，它是存在的，现在又是星期五，可没有领带能送回。

很多物理学家十分严肃地坚信有快子（见《科学美国人》1970 年 2 月号，范伯格写的"比光还快的粒子"）。根据相对论，光速是普通粒子速度的上限。然而，物理学家推测，可能存在着一种其运动速度总是比光还快得多的粒子，范伯格称之为快子。对于快子而言，光速是它的速度的下限。相对论要求，如果这种粒子存在，则它必须随时间的倒退而运动，如下面歌谣中的女郎：

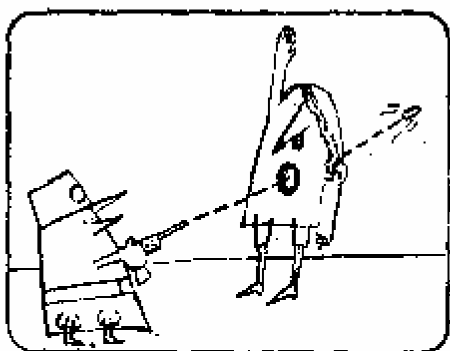
年青小姐名瑰丽，
步履轻快光难及。
出门才驾相对论，
前夜早已回家里。

这组画片悖论并没有证明快子不存在，它只不过表明，如果快子存在，它们是无法用于通讯的。如果用了，就会出现画片中说明的那种逻辑矛盾。若你对这一悖论和快子研究的意义有兴趣的话，可参见《物理评论》1970 年 7 月 15 日纽科姆的"快子，及电话"。

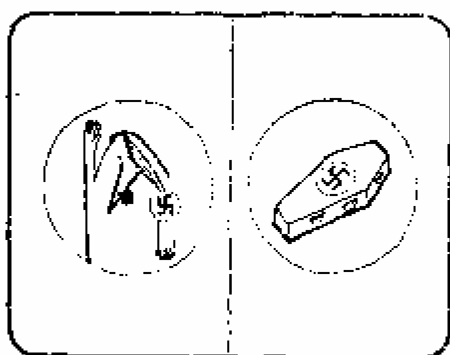
11 · 并列的世界



M：科学幻想作家想出了很多异想天开的办法来逃避时间旅行中的荒谬结果。他们想象，无论时间旅行者回溯到过去的什么时候，这个世界就马上分成等同的两半，各有不同的时—空。



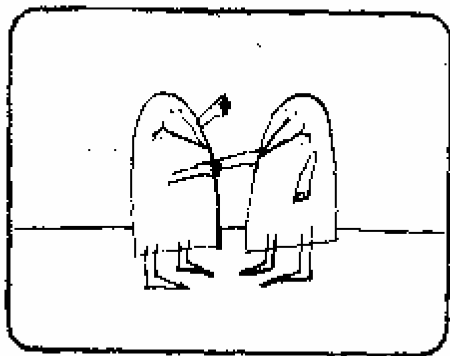
M：它是这样的。假定你回到 1930 年，向希特勒开枪……只要这事一发生，宇宙就分成两个并列的世界。



M：宇宙 1 中希特勒还活着；宇宙 2 中希特勒已经死了。



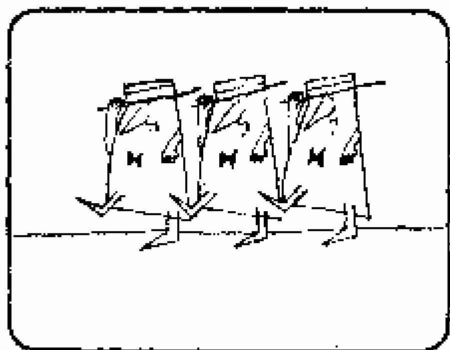
M：如果你在宇宙 2 中又回到现在，就会在旧报纸上看到说希特勒如何被打死。你离开的那个世界，希特勒并没有被打死，但你已根本不能返回到那个世界上去了。



M：这种宇宙分杈理论有着很多奇异的可能性。假定你回到 1 年前，和你自己握手：

弗 1：你好，弗姆斯特。

弗 2：很高兴碰到你，弗姆斯特。



M：后来，你们当中一个不管是谁又跳进时间机器中，回头碰到你们二位。这时就有三个弗姆斯特。这样重复，数以百计的弗姆斯特都可以创造出来。

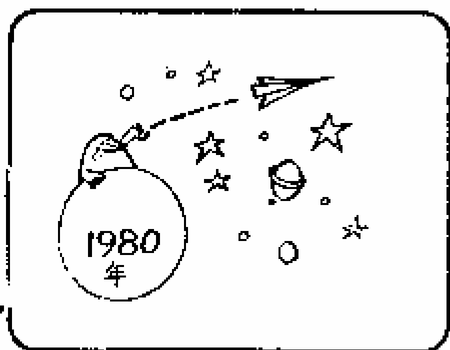
有一个奇妙的方法使人可以回到过去而不可能出现逻辑上的矛盾，科学幻想作家首先想出了这个方法，科学幻想故事的成功也正在于此。窍门是无论什么人或事物一进入过去，世界就分成并行的两个，如果是这样，就不会有布朗教授又存在又不存在这一矛盾，也不会有橡树既有又没有矛盾。如果有两个并列的世界，布朗教授（或橡树）则只在一个世界中，而在另一个世界里却没有他。

虽说这种分杈世界的概念令人难以置信，但却确实存在以此为基础的量子力学解释。它称为“多世界”理论，有整整一本书介绍它：《量子力学的多世界解释》。根据这个首先由埃弗雷特在 1957 年鼓吹的狂妄的理论，宇宙在每一微秒都会分裂为无数并列的世界，每一个都是在那分裂瞬间可能发生的许许多多微观事件的一种可能的组合。这会导致具有无限多个宇宙这样一种难以置信的情景，在这里，这些宇宙代表了由所有可能事件构成的各种不同的可能组合。

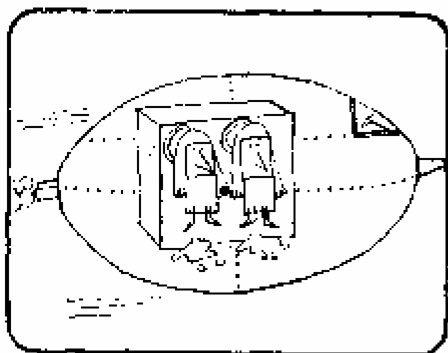
正如弗里德里克·布朗在他的科学幻想小说：“好一个疯狂的宇宙”中描写的景象：

“如果有无限多个宇宙，就必然有一切可能的组合。那么，每一件事都必然会是真的……就会有一个宇宙，真有哈德勒堡的芬恩其人，他做着马克·吐温描写他要做的那些事。事实上，有无限多宇宙，哈德勒堡的芬恩在其中每一个都在写马克·吐温描写他要他的事的各种可能的变异。……无限多宇宙，其中每一个的状况都是我们无法用言语来描述，也无法用思想来想像的。”

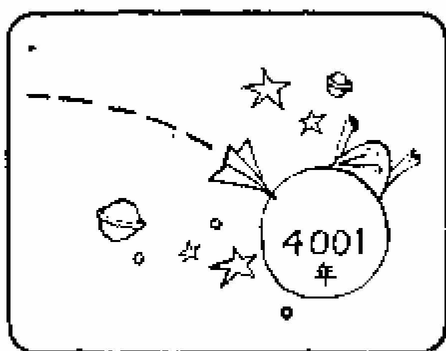
12 · 时间的延迟



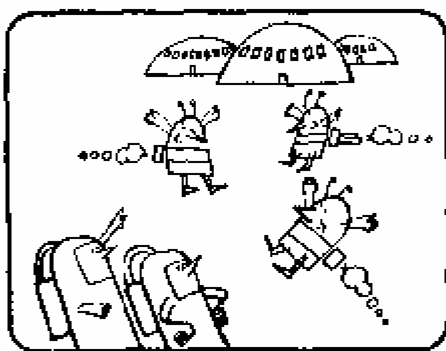
M：向着过去旅行产生了如此荒唐的谬论，所以没有一个科学家认真看待它。但是向着未来旅行就是另一回事了。假定一个宇宙飞船在 1980 年出发，以接近光速飞行。



M：飞船飞得越快，它的时间就过得越慢。在飞船中的宇宙航行员看来，时间还如往常一样。但是在我们看来，他们就仿佛雕塑像一般。



M：飞船飞到另一个星系，又返回来。对飞船中的宇航员来说，这趟旅行只经历了 5 年。可是，在飞船回到地球登陆时，地球已过了几千年。



M：这种时间旅行是无法导致谬论的，宇航员却自然地进入了地球的未来。他们再也回不来了。

只有回到过去的时间旅行才会引起矛盾。只要一个人或一件事物飞向未来，而不再回来，就不会有谬论。当你夜间睡觉时，在某种意义上讲，你就是走向未来。一个人可以被置于休眠状态，一千年以后再使他苏醒。很多科学幻想小说就

是以这类“时间旅行”为基调的，较著名的有威尔斯的《当熟睡者醒来时》。

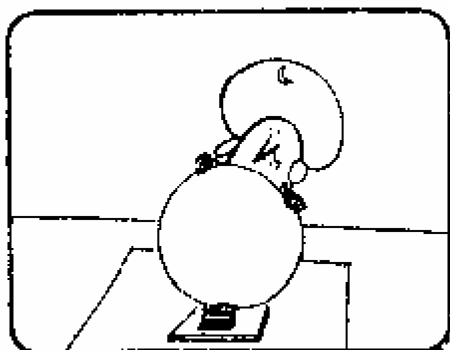
爱因斯坦的相对论给出了一种完全不同的方法到未来去旅行。按照狭义相对论，一个物体相对于静止的观察者而言，它运动越快，它的时间就过得越慢。比如，有一个宇宙飞船以接近光速在飞行，那么飞船上的时间就要此地球上慢得多。在飞船止，宇航员丝毫不会感到有任何异常。他的时钟看来在正常地走着，他的心脏会以正常的速率跳动。可是，如果地球上的观察者有什么办法能看到它们的话·他们看上去将运动得如此缓慢，就好像待在那里不动一样。

令 v 是宇宙飞船的速度，c 是光速，二者采用同样的单位。令 T 是宇航员在飞船上测量的时间间隔，T’是地球上的观察者测得飞船上同一事件的时间间隔。两个时间间隔之间的关系由下式给出：

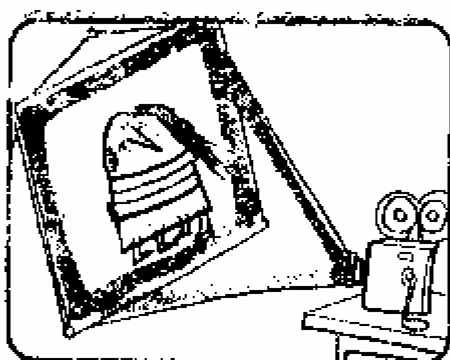
$$T = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

学生们大概乐意给飞船以各种不同的速度，比如说 $\frac{9}{10}$C，$\frac{99}{100}$C 等等。然后算，在飞船上飞行一年相当于地球上过多少年。这样一个班级讨论将使学生们知道一些“时间延迟”的性质——相对论中著名的罗伦兹变换公式之一。这也是训练计算的好练习。

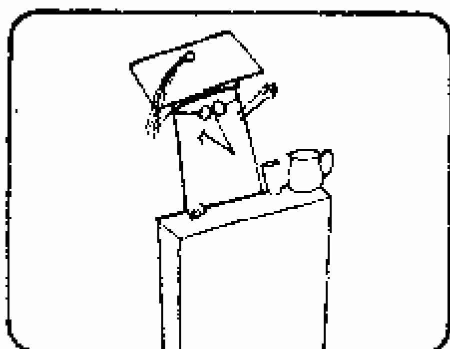
13 · 命运、机会和自由意志



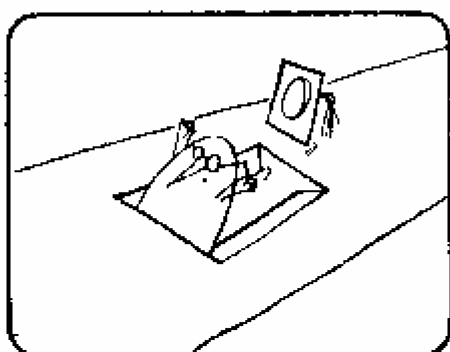
M：尽管物理学家对时间了解得越来越多，它的实质仍然是神秘莫测的。最大的一个问题就是，未来是否可以完全断定。



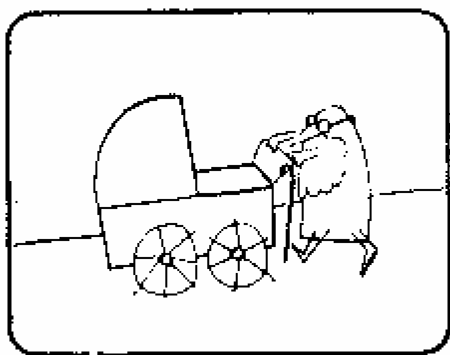
甲：我是个决定论者……啊，啦啦啦啦……。无论什么要发生，它将会发生。生活就像电影，我们就是银幕上的人物。我们以为我们拥有自由意志。事实上，我们只不过是表演着早已预定好的情节。



乙：我是个非决定论者（自由意志论者）。未来仅仅是部分决定的。我们可以用我们的意志改变事物。历史实在是惊人的。



M：某些科学家强烈地信仰决定论。另一些则同样强烈地信仰非决定论。你相信什么？这是一个深刻的哲学问题，是科学无能回答的问题。



科学家、哲学家和普通人在未来是否由过去完全决定这一问题上，明显地分为不同部分。决定论者相信，在任一给定时刻，宇宙的总状态完全决定着宇宙在任何未来时刻的总状态。这是爱因斯坦本人的信念。推崇决定论的哲学家中，最伟大的是斯宾诺莎，爱因斯坦称自己为斯宾诺莎主义者。这也是爱因斯坦终于未能接受量子理论的原因之一，因为在量子理论中，机会在微观现象中在决定事态发展上起着决定性作用。“我不相信上帝会拿宇宙来玩骰子”，爱因斯坦曾经这样解释。

一个非决定论者相信，宇宙的未来只是部分地由它现在的状态决定的。他不一定相信自由意志。他所相信的也许只不过是在微观现象中，机会的作用就是使未来不能完全被断定。此外，他还可能相信，生命体，尤其是人类，拥有“自由意志”，这使得他们有能力以一定方式大大改变未来，可这种方式即便对于那些超人也是无法预言的，尽管这些超人在认识当今宇宙中想知道什么就知道什么。查尔斯·皮尔斯和威廉·詹姆斯是拥护非决定论的两个著名美国哲学家。

这些深奥的哲学问题与时间的性质有着密切关系，在我们说一件事“引起”另一件事时，我们的意思中也涉及到这些问题。没有人怀疑，数学可以下述方式应用于我们对宇宙的测量：即很多事件可以以很高的精度预言出来，比如，下一次日蚀的时间。同时，也没有人否认，其他一些事件，例如，下一次死亡落在谁头上，下一周天气怎样等是不能准确地预言的，因为导致它们发生的因素过分复杂了。

重要的问题是，宇宙的基本定律是否是完全决定论性的，或者真正新奇的事物是否是由微观方面的纯粹机会产生出来的，抑或是由宏观方面的生命体的自由意志产生出来的，或者既是由纯粹机会也是由生命的自由意志产生出来的。这些问题自古以来就在古希腊人中，科学家、哲学家以及其他各种人中一直在争辩着。学生们可以对这个问题所持观点进行一次无记名投票，这将使这场讨论增色不少。

参考书目

第一章 逻辑悖论

1・Evert W. Beth，数学基础：科学的哲学研究，Haper Torch Books，1966，第17章
2・Martin Gardner，逻辑机、图、布尔代数，Dover，1968
3・Martin Gardner，《科学美国人》，第六本，数学游戏，W. H. Freeman，1971
4・Martin Gardner，《科学美国人》，新的数学游戏，Simon & Schuster，1966
5・Martin Gardner，意外的绞刑和其他数学游戏，Simon & Schuster，1968
6・R. L. Goodstein，数学的哲学短文集，第二章，Humanities，1965
7・John van Heijenoot，哲学百科全书中的"逻辑悖论"，Macmillan Company and Free Press，1967
8・Harold Jacobs，《数学，人类的魄力》，W. H. Freeman，1970
9・Harold Jacobs，《几何学》，W. H. Freeman，1974
10・Robert L. Martin，《说谎者悖论》，Yale University Press，1970
11・W. V. Quine，《科学美国人》之《悖论》，1962年4月号
12・Bertrand Russell，《数学原理》引言第八段，Cambridge University Press，1910-13，简装本，1962
《科学美国人》中的有关资料
数学家，刘易斯·卡洛尔，(Warron Weaver)，1966年4月号
悖论，(W. V. Quine)，1962年4月号
数学基础，(W. V. Quine)，1964年7月号
避开悖论，(Anatol Rapoport)，1967年7月号

第二章 概率论悖论

1・Richard A. Epstein，《赌博的理论和统计学的逻辑》，Academic Press，1967
2・William Felles，《概率论及其应用入门》卷1，2，John Wiley and Sons，1968，1971
3・Harold Jacobs，《数学，人类的魄力》，W. H. Freeman，1970
4・Oswald Jacoby，《怎样预测手气》
5・Marc Kac，"概率论"《科学美国人》，1964年9月号，后又收在Morris Kline编辑的《数学和现代世界》中，W. H. Freeman & Co.，1968
6・Mauriee Kraitchik，《数学娱乐》，Dover，1953
7・Frederick Mosteller，《概率论中五十个难题》，Addison-Wesley，1965
8・Edward O. Thorp，《初级概率论》，John Wiley and Sons，1966
9・Warren Weaver，《女士的运气：概率论》，Doubleday Ancher Books，1963

10·William Allen Whitworth，《一千例中的机遇》，Hafner Publishing Co.，1965
《科学美国人》中的有关资料
通讯的数学，Warren Weaver，1949 年 7 月号
概率论，Warren Weaver，1950 年 10 月号
概率论是什么？，Rudolf Carnap，1953 年 9 月号
不确定原理，Geoge Gamow，1958 年 1 月号
真理和证明，Alfred Tarski，1969 年 6 月号

第三章 关于数的悖论

1·Albert H. Beiler，《数论游戏》，Dover，1964
2·Tobias Dantjig，《数—科学的语言》，Free Press，1967
3·Martin Gardner，《数学、魔术和秘诀》，Dover，1956
4·Martin Gardner，《科学美国人的数学之谜与游戏》，Simon & Schuster，1964
5·Paul R. Halmos，《质朴的集合论》，Van Nostrand，1960
6·Harold R. Jacobs，《数学—人类的魄力》，W. H. Freeman，1970
7·Kasner, Sdwarol and Jannes R. Newman，《数学和想象》，Simon & Schuster，1940
8·Charls S. Ogilvy and John T. Andersm，《数学揽胜》，Oxford University Press，1966
《科学美国人》中的有关资料
数论，（Paul S. Herwitz），1951 年 7 月号
有没有无限？，（Hans Hahn），1962 年 11 月号
完美的数，（Constance Reid），1953 年 3 月号
歌德尔的证明，（Ernest Nagel & Janes R. Newman），1956 年 6 月号
数学之筛，（David Hawkins），1958 年 12 月号
数，（Philip J. Davis），1964 年 9 月号
非康妥集合论，（Paul J. Cohen & Reuben Hersh），1967 年 12 月号
实数线的新的模，（Lynn Asthur Steen），1971 年 8 月号

第四章 几何学悖论

1·Hannes Alfven，世界—反世界：宇宙论中的反物质，W. H. Freeman，1966
2·Bradford Arnold，基本拓扑学的直觉概念，Prentic-Hall，1962
3·Stephen Barr，拓扑学实验，T. Y. Crowell，1972
4·Richard Courant & Herbert Robbins，数学是什么？，Oxford University Press，1941
5·H. S. M. Coxeter，几何导论，John Wiley，1961
6·Ya. S. Dubnov，几何证明中的错误，D. C. Health，Topics in Mathmatics Series，1963
7·Martin Gardner，两面性的宇宙，Basic Books，1964
8·Samuel Greitzer & H. M. Coxeter，几何学重览，Random House，New Mathmatical Library，1967

9·David Hilbert & Stephen Cohn-Vossen，几何学和想象，Chelsea Publishers，1952（本书有中译本，名为《直观几何》——译者）
10·Harold R. Jacobs，几何学，W. H. Freeman，1974
11·Harold R. Jacobs，数学—人类的魄力，W. H. Freeman，1970
12·Edward Kasner & James R. Newman，数学和想象，Simon & Schuster，1940
13·C. Stanley Ogilvy，几何世界漫游，Oxford Unversity Press，1969
14·Hermann Weyl，对称性，Princeton University Press，1952
《科学美国人》中的有关资料
解析几何的发明，（Carl B. Boyer），1949 年 1 月号
拓扑学，（Albert W. Tucker & Herbert S. Bailey, Jr.），1950 年 1 月号
列昂纳德、欧拉和哥尼斯堡桥，（Leonhard, Euler edited by James R. Newman），1953 年 7 月号
儿童是怎样形成数学概念的，（Jean Piaget），1953 年 11 月号
几何学和直觉，（Hans Hahn），1954 年 4 月号
空间的弯曲，（P. Le Corbeiller），1954 年 11 月号
现代宇宙论，（George Gamrow），1954 年 3 月号
射影几何学，（Morris Kline），1955 年 1 月号
直线，（Morris Kline），1956 年 3 月号
演化着的宇宙，（George Gamrow），1956 年 9 月号
几何学，（Morris Kline），1964 年 9 月号
反物质和宇宙论，（Hannes Alfven），1967 年 4 月号
欧几里德之前的非欧几何，（Imre Toth），1969 年 11 月号

第五章 统计学悖论

1·H. C. Freyer，《统计学要素》，Wiley，1954
2·Lawrence J. Kplan，《经济学与商业方面的基本统计学》，Pitman，1966
3·Horace E. Levinson，《机会、运气和统计学》，Dover，1963
4·M. J. Moroney，《出自计算的事实》，Penguin Books，1956
5·F. R. Mosteller，Robert E Rouske & G. B. Thomas，《概率论和统计学》，Addison-Wesley，1961
6·W. Allen Wallis & Harry V. Roberts，《统计学的本质》，Free Press，1965
《科学美国人》中的有关资料
通讯的数学，（Warren Weaver），1949 年 7 月号
运筹学，（Horace C. Levinson & Arthur A. Brown），1951 年 3 月号
质量管理的实践，（A. G. Dalton），1953 年 3 月号
证实，（Wesley C. Salmon），1973 年 5 月号
基于，（A. J. Ayer），1965 年 10 月号

第六章 关于时间的悖论

1・Lewis Carroll，刘易斯·卡洛尔全集，Modern Library Giomts
2・Groff Conklin 编辑，《关于因次的科学幻想故事》，Vanguard，1953
3・Bryce S. Dewitt & Neill Graham 编《量子力学的多世界解释》，Priston University Press，1973
4・Simon Fleet，《钟》，Octopus Books，1972
5・Richard M. Gale 编，《时间的哲学》，Fernhill，1968
6・Martin Gardner，“时间可以逆转吗？”，《科学美国人》，1966 年 1 月号
7・Martin Gardner，《科学美国人》，数学游戏第六集，W. H. Freeman，1971
8・Adolf Grunbaum，《现代科学与基础悖论》，Wesleyan Unversity Press，1967
9・Bertrand Russell，《我们对外部世界的知识》，Humanities，1961
10・Wesley C. Salmon 编，《基诺悖论》，Bobbs-Merrill Library of Liberal Arts，1969
11・Philip van Doren Stern 编，《时间的旅行者》，Doubleday，1947
12・Edwin F. Taylor & John A. Wheeler，《时空物理学》，W. H. Freeman，1966
13・G. J. Whitrow，《时间的自然哲学》，Haper Torch Book，1961
《科学美国人》中的有关资料
光速，（J. H. Rush），1955 年 8 月号
时间反演，（John M. Blatt），1956 年 8 月号
心理的时间，（John Cohen），1964 年 11 月号
时间能逆转吗？，（Martin Gardner），1967 年 1 月号
时间反演实验，（Oliver E. Overseth），1969 年 10 月号
比光还快的粒子，（Gerald Feiberg），1970 年 2 月号